DM 2
Ensembles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 17 Octobre 2023

Problème 1 :
Soit E, F deux ensembles non vides et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. On considère
$$\mathcal{S} = \{X \subset E,\ f^{-1}(f(X)) = X\}.$$
   (a) Montrer que $\forall X \subset E$, $X \subset f^{-1}(f(X))$.
   (b) Que dire de $\mathcal{S}$ si f est injective ?
   (c) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.
   (d) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion, *i.e.* montrer que $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, $X \cap Y \in \mathcal{S}$ et $X \cup Y \in \mathcal{S}$.
   (e) Soit $X \subset E$ et $A \in \mathcal{S}$ tel que $X \cap A = \emptyset$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.
   (f) Soit $X, Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $E \setminus X \in \mathcal{S}$ et $Y \setminus X \in \mathcal{S}$.
   (g) Montrer que $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(f(E))$ définie par $\varphi(A) = f(A)$ est une bijection.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$.
   (a) Montrer $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
   (b) Déterminer les classes d'équivalences dans le cas où f est injective.
   (c) On note $\mathcal{C} = \{\mathrm{Cl}(x), x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)$. On pose $s : E \to \mathcal{C}$ définie par $s(x) = \mathrm{Cl}(x)$. Montre que s est surjective.
   (d) On pose maintenant $i : f(E) \to F$ définie par $i(x) = x$. Montrer que i est une injection.
   (e) On pose $\varphi : \mathcal{C} \to f(E)$ définit par $\forall C \in \mathcal{C}$, $\varphi(C) = f(x)$ où $x \in C$ quelconque. Montrer que φ est bien définie.
   (f) Montrer que $f = i \circ \varphi \circ s$.