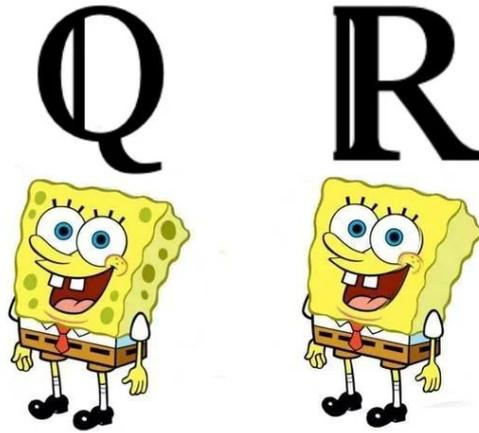


## Chapitre 6

# Relations d'Ordres

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

17 octobre 2023



Ici on introduit la notion de “plus grand que” et “plus petit que”, vu par les mathématiciens. Cette notion intuitive a été formalisée pour coller aux exigences mathématiques. Cette formalisation a donné naissance à la notion de relation d'ordre. Qui permet donc, comme son nom l'indique, d'ordonner des éléments d'un ensemble, donc de pouvoir dire si tel ou tel élément est plus petit ou plus grand qu'un autre.

L'intérêt majeure de cette notion vient dans les chapitres qui vont suivre. C'est à partir de ce chapitre qu'on pourra donc s'inquiéter de la notion de limite de façon correcte pour un mathématicien (car nous sommes des mathématiciens), la notion de croissance, et d'une manière plus générale toute notion qui nécessite, à un moment donné ou un autre, de pouvoir comparer des éléments.

Méfiez-vous de celui qui veut mettre de l'ordre. Ordonner, c'est toujours se rendre le maître des autres en les gênant.

*Denis Diderot*  
Extrait incomplet hors contexte

## Table des matières

<b>1 Relations d'ordre</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions . . . . .	3
1.2 Minorants, Majorants, Maximum, Minimum, Bornes supérieures et bornes inférieures . . . . .	4
<b>2 Valeurs absolues et Partie Entière</b>	<b>11</b>
2.1 Valeur absolue . . . . .	11
2.2 Partie Entière . . . . .	13
<b>3 Les ensembles usuels de nombres</b>	<b>16</b>
3.1 Rappel sur les ensembles de nombres usuels . . . . .	16
3.2 Les cas des entiers . . . . .	18
3.3 Le corps $\mathbb{Q}$ . . . . .	21
3.4 Le corps des réels $\mathbb{R}$ . . . . .	26
3.4.1 Création . . . . .	26
3.4.2 Intervalles . . . . .	30
3.4.3 Densité . . . . .	32
3.4.4 Droite réelle achevée . . . . .	34

# 1 Relations d'ordre

## 1.1 Définitions

Définition 1.1 (Relation d'ordre) :

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $\preceq$  une relation binaire sur  $E$ .

- Si la relation  $\preceq$  vérifie :

(i)  $\forall a \in E, a \preceq a$

[Réflexivité]

(ii)  $\forall a, b, c \in E, \text{ si } a \preceq b \text{ et } b \preceq c \text{ alors } a \preceq c.$

[Transitivité]

(iii)  $\forall a, b \in E, \text{ si } a \preceq b \text{ et } b \preceq a \text{ alors } a = b$

[Antisymétrie]

alors  $\preceq$  est dite une *relation d'ordre (partielle)*.

- En outre, si  $\forall a, b \in E$ , on a soit  $a \preceq b$  soit  $b \preceq a$  (i.e. deux éléments quelconques peuvent être comparés), on dit que  $\preceq$  est une *relation d'ordre totale*.
- Si  $\preceq$  est une relation d'ordre, on dit que  $(E, \preceq)$  est un *ensemble ordonné*.
- Si  $(E, \preceq)$  est un ensemble ordonné si  $a, b \in E$  tel qu'on ait soit  $a \preceq b$ , ou  $b \preceq a$ , alors  $a$  et  $b$  sont dits *comparables*.
- Si  $\preceq$  est une relation d'ordre totale, on dit que  $(E, \preceq)$  est un *ensemble totalement ordonné*.

Dans le cas où la relation d'ordre n'est pas totale, on dit parfois que la relation d'ordre est une relation d'ordre partielle. Cet adjectif est en général sous-entendu. Si ce n'est pas précisé (ou tant que ce n'est pas démontré), une relation d'ordre sans plus de précision sera considérée la plus générale possible et donc partielle. Pour une relation d'ordre totale, l'adjectif totale sera toujours précisé. C'est une information en plus de la simple notion de relation d'ordre.

### Exemple :

- La relation  $\leq$  est une relation d'ordre totale sur les ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .
- La relation  $|$  sur  $\mathbb{N}^*$  défini par  $n|m \iff \exists p \in \mathbb{N}, m = np$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^*$  qui n'est pas totale.
- Si  $E$  est un ensemble, la relation  $\subset$  est une relation d'ordre sur  $\mathcal{P}(E)$  qui n'est pas totale.

Attention. Il faut bien prendre garde à la notation choisie pour une relation d'ordre pour essayer de ne pas confondre avec une autre.

### Remarque :

Il est toujours possible de définir une relation d'ordre sur n'importe quel ensemble. Quitte à ce qu'elle ne soit pas totale. Mais elles ne sont pas toujours non plus compatibles avec les opérations définies sur l'ensemble en question.

Par exemple, sur  $\mathbb{C}$  (ou sur  $\mathbb{R}^2$ , ce qui revient au même), on peut définir plusieurs relations d'ordre. La relation d'ordre totale la plus naturelle est l'ordre lexicographique, i.e.  $z \preceq z' \iff \Re(z) \leq$

$\Re(z')$  ou  $\Re(z) = \Re(z')$  et  $\Im(z) \leq \Im(z')$  (où, bien sûr,  $\leq$  est la relation d'ordre usuelle sur  $\mathbb{R}$ ). Mais cette relation d'ordre n'est pas compatible avec les opérations sur  $\mathbb{C}$ . Par exemple, on a  $0 \preccurlyeq i$  ce qui aboutit très vite à une contradiction avec la multiplication.

## 1.2 Minorants, Majorants, Maximum, Minimum, Bornes supérieures et bornes inférieures

Définition 1.2 (Majorant, Minorant, Ensemble minoré, majoré, borné [ $\checkmark$ ]) :

Soit  $A \subset E$  non vide et  $(E, \preccurlyeq)$  un ensemble ordonné.

- On appelle minorant de  $A$  (dans  $E$ ) un élément  $m \in E$  tel que  $\forall a \in A, m \preccurlyeq a$ .
- On appelle majorant de  $A$  (dans  $E$ ) un élément  $M \in E$  tel que  $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$
- On dit que  $A$  est minoré (dans  $E$ ) s'il admet un minorant et on dit que  $A$  est majoré (dans  $E$ ) s'il admet un majorant. Si  $A$  est majoré et minoré, on dit que  $A$  est borné.



Un ensemble peut, a priori, avoir plusieurs majorants et/ou plusieurs minorants. Il n'y a pas unicité. Il peut même ne pas en avoir du tout !

Il est possible aussi qu'un majorant ou un minorant de  $A$  soit lui même un élément de  $A$  (ce que nous verrons juste après).

### Exemple :

1. On considère l'ensemble totalement ordonné  $(\mathbb{Z}, \leq)$ . Déterminer les majorants et minorants de  $\mathbb{N}^*$  (s'ils existent).
2. On considère  $(\mathbb{N}, \leq)$  qui est un ensemble totalement ordonné. Déterminer les majorants et minorants de  $\mathbb{N}^*$  (dans  $(\mathbb{N}, \leq)$  cette fois ci).

!!! ATTENTION !!!



Attention ! Il est toujours nécessaire de préciser l'ensemble par rapport auquel on cherche les majorants et minorants. L'exemple précédent montre qu'un même ensemble a des majorants et minorants différents suivant l'espace ambiant que l'on considère. Pour avoir un minorant ou majorant, il faut comparer les éléments de notre ensemble avec des éléments extérieurs à cet ensemble. La question de quel extérieur on considère se pose alors.

**Définition 1.3 (Maximum, Minimum, Extremum [✓]) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$  non vide.

- On appelle plus grand élément de  $A$ , noté  $\max A$ , un élément  $a \in A$  tel que  $\forall x \in A, x \preceq a$ .
- On appelle plus petit élément de  $A$ , noté  $\min A$ , un élément  $a \in A$  tel que  $\forall x \in A, a \preceq x$ .
- Soit  $e \in E$ . On dit que  $e$  est un extremum de  $A$  si  $e$  est un maximum ou un minimum de  $A$ .

Donc un maximum (resp. un minimum) est un élément de l'ensemble que l'on considère qui doit aussi être un majorant (resp. un minorant).

**Exemple :**

$\min \mathbb{N} = 0$  et  $\mathbb{N}$  n'a pas de maximum.  $\mathbb{Z}$  n'a pas de minimum ni de maximum.

**Remarque :**

Dans le cas d'un minimum ou d'un maximum, il n'est pas nécessaire de préciser l'ensemble par rapport auquel on cherche le maximum ou le minimum. En effet, cette notion ne dépend que de l'ensemble que l'on considère, que l'on étudie. Et pas d'un ensemble plus gros qui le contiendrait. D'une certaine manière, la notion de majorant ou minorant permet la comparaison avec des étrangers à l'ensemble que l'on considère alors que la notion de maximum et minimum est une notion intrinsèque à cet ensemble. On ne compare pas avec des gens extérieurs à l'ensemble. Donc il n'y a pas de question à ce poser du type "quels sont les étrangers que je considère ? Quels est l'ensemble extérieur qui peut m'intéresser ?" dans la mesure où l'on ne sort plus de notre ensemble de départ.

**Proposition 1.1 (Unicité du maximum et du minimum pour une relation d'ordre totale**

**[✓]) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$  non vide.

Si  $\max A$  existe alors il est unique. Et si  $\min A$  existe, alors il est unique aussi.

En particulier, dans  $\mathbb{R}$ , le maximum et le minimum d'une partie sont uniques, s'ils existent.

*Démonstration :*

On va traiter seulement le cas de l'unicité du maximum. Le cas du minimum se faisant de la même manière.

Supposons que  $A$  admette deux éléments maximal. Supposons  $\exists a_1, a_2 \in A$  tel que  $\forall a \in A$ ,  $a \preceq a_1$  et  $a \preceq a_2$ .

On a, par définition de  $a_1$ ,  $a_2 \preceq a_1$ . Mais  $a_1 \in A$  aussi. Donc, par définition de  $a_2$ , on a  $a_1 \preceq a_2$ . D'où  $a_1 = a_2$  et donc l'unicité du maximum.  $\square$

**!!! ATTENTION !!!**



L'unicité ne fonctionne que grâce à la relation d'ordre totale ici. En fait, avec une relation d'ordre partielle, on peut avoir des ensembles qui admettent plusieurs plus petits éléments (ou plus grands). Leurs nombres viennent du fait qu'on ne peut pas les comparer les uns aux autres et donc avoir un plus grand parmi les plus grands.

**Exemple :**

Si on prend  $E = \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$  muni de l'inclusion qui est une relation d'ordre partielle et  $A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ . Alors  $A$  admet un minimum mais deux maximums non comparables.

On peut donc parler DU maximum et DU minimum. Les expressions "LE maximum de  $A$ " et "LE minimum de  $A$ " ont désormais un sens.

**!!! ATTENTION !!!**



Attention, le maximum est toujours un majorant de  $A$ , mais tout majorant n'est PAS un maximum. Il peut très bien ne pas exister de maximum et pourtant  $A$  peut avoir plein de majorant. Par exemple, l'ensemble  $\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$  est un ensemble qui n'a pas de maximum. Mais 1 est un majorant.

Définition 1.4 (Bornes supérieures, Bornes inférieures [ $\checkmark$ ]) :

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$  non vide.

- On appelle borne supérieure de  $A$  (notée  $\sup A$ ) un élément  $M \in E$  vérifiant :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ majorant de } A \\ \forall M' \in E \text{ majorant de } A, M \preceq M' \end{cases}$$

- On appelle borne inférieure de  $A$  (notée  $\inf A$ ) un élément  $m \in E$  vérifiant :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} m \text{ minorant de } A \\ \forall m' \in E \text{ minorant de } A, m' \preceq m \end{cases}$$

**Remarque :**

On notera qu'une borne supérieure (resp. inférieure) est en particulier un majorant (resp. un minorant).

Ici encore, la notion de borne supérieure et borne inférieure dépend encore de l'espace ambiant que l'on considère. L'existence d'une borne sup ou d'une borne inf n'est pas automatique a priori. C'est une propriété de l'espace ambiant.

**Exemple :**

Dans  $\mathbb{R}$ , si  $A = [0, 1[$  et  $B = ]-\infty, 1]$ , alors  $\sup A = 1$ , 1 est majorant de  $A$ , mais  $A$  n'a pas de maximum. Mais on a  $\inf A = 0 = \min A$  et c'est un minorant de  $A$ . Pour  $B$ , on a  $\sup B = \max B = 1$  mais  $B$  n'a pas de minorant, donc  $\min B$  n'existe pas, ni  $\inf B$ .



L'existence d'une borne supérieure n'est pas automatique ! Un ensemble peut très bien ne pas avoir de borne supérieure.

On peut parfaitement avoir des parties majorées qui n'admettent pas de borne supérieure. Voir un exo du TD avec la partie  $A = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < \sqrt{2}\}$  dans  $\mathbb{Q}$ .

**Remarque :**

Une borne supérieure correspond en fait au plus petit des majorants et une borne inférieure correspond au plus grand des minorants. C'est à dire qu'on a la propriété :

**Proposition 1.2 (Plus petit des majorants / Plus grands des minorants) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$  non vide.

- (i) Si  $\sup A$  existe, alors  $\sup A = \min\{M \in E, \forall a \in A, a \preceq M\}$ .
- (ii) Si  $\inf A$  existe, alors  $\inf A = \max\{m \in E, \forall a \in A, m \preceq a\}$ .

*Démonstration :*

On ne va démontrer que le (i), le (ii) se faisant de façon complètement similaire.

On pose  $A_{sup} = \{M \in E, \forall a \in A, a \preceq M\}$ . On sait que  $A_{sup} \neq \emptyset$  puisque  $A$  est majoré. Il faut donc montrer d'abord que  $A_{sup}$  est minoré, puis que  $\min A_{sup}$  existe et enfin montrer l'égalité  $\min A_{sup} = \sup A$ .

Par définition de  $A_{sup}$ , si  $a \in A$ , on sait que  $\forall M \in A_{sup}, a \preceq M$ . Donc  $a$  est un minorant de  $A_{sup}$ . Donc  $A_{sup}$  est minoré par tout élément de  $A$ .

Il reste à montrer que  $\min A_{sup}$  existe et coïncide avec  $\sup A$ . Tout d'abord, on sait que  $\sup A \in A_{sup}$ . Donc nécessairement, si  $\min A_{sup}$  existe, alors  $\min A_{sup} \preceq \sup A$ . Mais d'autre part, la définition de  $\sup A$  permet de dire que  $\forall M \in E$  majorant de  $A$ , on a  $\sup A \preceq M$ , c'est-à-dire que  $\forall M \in A_{sup}, \sup A \preceq M$ . Or  $\sup A$  est un élément de  $A_{sup}$ . Donc par définition du minimum,  $A_{sup}$  admet un minimum et on a  $\min A_{sup} = \sup A$ .

Donc  $\sup A$  correspond au minimum des majorants de  $A$ . C'est donc un majorant de  $A$  (par définition de  $\sup A$ ) et c'est le plus petit d'entre eux.  $\square$

**Proposition 1.3 (Unicité de la borne inf et de la borne sup [✓]) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$ .

Si  $\inf A$  (resp.  $\sup A$ ) existe alors elle est unique.

Là encore, on pourra donc parler de LA borne inférieure ou de LA borne supérieure de  $A$  (dans  $E$ ).

*Démonstration :*

On va traiter le cas de la borne supérieure.

Supposons qu'il existe deux bornes supérieures  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans  $E$ . Donc  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des majorants de  $A$  tel que  $\forall M \in E$  majorant de  $A$ ,  $\alpha_1 \preceq M$  et  $\alpha_2 \preceq M$ . On a donc en particulier, comme  $\alpha_1$  est un majorant de  $A$ ,  $\alpha_2 \preceq \alpha_1$  et on a aussi  $\alpha_1 \preceq \alpha_2$  puisque  $\alpha_2$  est aussi un majorant de  $A$ .

D'où l'égalité par propriété de la relation d'ordre.  $\square$

**Exemple :**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Montrer que si  $A$  admet un majorant  $a$  dans  $A$ , alors on a  $\max A = \sup A = a$ .

**Proposition 1.4 (Maximum = sup si existent) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \subset E$ .

Si  $\max A$  (resp.  $\min A$ ) existe alors  $\sup A$  (resp.  $\inf A$ ) existe aussi dans  $E$  et on a  $\max A = \sup A$  (resp.  $\min A = \inf A$ ).

*Démonstration :*

On va faire la démo dans le cas du minimum pour changer. Le cas du maximum se traite exactement de la même manière.

On suppose donc que  $\min A$  existe (et est donc dans  $A$  par définition). Dans ce cas, la définition du minimum nous fournit que  $\forall a \in A, \min A \preceq a$ . Donc par définition  $\min A$  est un minorant de  $A$ . Mais d'autre part,  $\forall m \in E$  minorant de  $A$ , on a  $\forall a \in A, m \preceq a$ . Donc en particulier  $\forall m \in E$  minorant de  $A$ , on a  $m \preceq \min A$  puisque  $\min A$  est un élément de  $A$ .  $\min A$  est donc le plus grand des minorants. C'est donc la borne inférieure de  $A$  et on a donc  $\inf A = \sup\{m \in E, \forall a \in A, m \preceq a\} = \min A$ .  $\square$

**!!! ATTENTION !!!**



L'existence de majorant, d'une borne sup ou d'un maximum n'implique pas forcément l'existence de l'un des autres. Il existe des ensemble ayant une borne sup mais sans maximum (par exemple  $\{1 - 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ ).

**Proposition 1.5 (CN d'existence de  $\sup A$  (resp.  $\inf A$ )) :**

Soit  $(E, \preceq)$  un ensemble totalement ordonné et  $A \neq \emptyset \in \mathcal{P}(E)$ .

Pour que  $\sup A$  (resp.  $\inf A$ ) existe, il est nécessaire (mais non suffisant !) que  $A$  soit majoré (resp. minoré).

*Démonstration :*

C'est la définition de  $\sup A$  (resp.  $\inf A$ ). Si ils existent, cela implique que  $A$  est majoré (ou minoré). Donc si  $A$  n'est pas majoré, on ne peut pas avoir de borne supérieure. Sinon on aurait une contradiction.  $\square$

!!! ATTENTION !!!



Cette proposition n'est qu'une condition NÉCESSAIRE pour l'existence de  $\sup A$  (ou  $\inf A$ ). Ce n'est absolument pas suffisant. Ce n'est pas parce qu'un ensemble est majoré que  $\sup A$  va exister. Pour preuve, voir un peu plus bas.

D'une manière générale, il y a beaucoup de cas pathologique de ce genre dans un ensemble ordonné générique. Mais dans  $\mathbb{R}$ , les choses sont beaucoup simplifiées. Mais seulement dans  $\mathbb{R}$  ! Même dans  $\mathbb{Q}$ , on trouve encore des choses étranges.

**Exemple :**

L'ensemble  $A = \{r \in \mathbb{Q}, r^2 \leq 2\}$  est majoré dans  $\mathbb{Q}$  mais n'a pas de borne sup dans  $\mathbb{Q}$  (voir exo 18 du TD pour le détail).

**Remarque :**

On a tout de même les relations :

$$\begin{array}{ccc} \max A & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \swarrow \searrow \\ \downarrow \end{array} & \sup A \\ \{1-1/n, n \in \mathbb{N}^*\} & & \{r \in \mathbb{Q}, r^2 < 2\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \swarrow \searrow \\ \downarrow \end{array} \quad A \text{ majoré}$$

Mais ATTENTION!!!! Ça ne marche que dans un seul sens en général.

**Contre-exemple :**

On considère  $E = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}$  muni de la relation d'ordre lexicographique. Autrement dit,

$$\forall (\varepsilon, n), (\xi, p) \in E, (\varepsilon, n) \preccurlyeq (\xi, p) \iff \begin{cases} \varepsilon < \xi \\ \text{ou} \\ \varepsilon = \xi \text{ et } n \leq p \end{cases}$$

On considère  $A = \{0\} \times \mathbb{Z} \subset E$ . Alors  $A$  est majoré dans  $E$  mais n'a pas de borne supérieure dans  $E$ .



En effet : tout d'abord, par définition des produits cartésiens,  $A = \{(0, n), n \in \mathbb{N}\}$ . Et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(0, n) \preccurlyeq (1, 0)$  car  $0 < 1$ . Donc  $(1, 0)$  est un majorant de  $A$ . En fait, on a même  $\forall p \in \mathbb{Z}$ ,  $(1, p)$  est un majorant de  $A$  dans  $E$ . Mais  $\mathbb{Z}$  n'est pas minorée. Il n'y a donc pas de plus petit majorant de  $A$  dans  $E$  (donc pas de borne sup de  $A$ ). En effet, admettons que  $A$  admette une borne sup dans  $E$ . Donc  $\exists (\varepsilon, p) \in E$  tel que  $(\varepsilon, p) = \sup(A)$ . Si  $\varepsilon = 0$ , alors  $(0, p+1) \in A$  et  $\alpha = (0, p) \prec (0, p+1)$ . Et donc  $\alpha$  n'est plus un majorant de  $A$ . ~~☹~~ Donc  $\varepsilon = 1$ . Donc  $\alpha = (1, p)$ . Mais dans ce cas,  $(1, p-1)$  est encore un majorant de  $A$  et  $(1, p-1) \prec \alpha$ . Ce qui contredit la définition de la borne sup (le plus petit des majorants). Donc re-~~☹~~. Et donc  $A$  n'a pas de borne sup.

## 2 Valeurs absolues et Partie Entière

### 2.1 Valeur absolue

Définition 2.1 (Valeur absolue) :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la valeur absolue de  $x$ , noté  $|x|$ , par :

$$|x| = \max(x, -x) = \text{sign}(x)x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Proposition 2.1 (Propriété de la valeur absolue) :**

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$
- (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| = |x||y|$
- (iii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$  [Inégalité Triangulaire]

*Démonstration :*

Cette démonstration est incluse en réalité dans la démonstration de la propriété correspondante sur

le module dans le chapitre sur les complexes. Mais on va le redémontrer ici en n'utilisant que les résultats relatifs à ce cours.

(i) On a  $|0| = \max(0, 0) = 0$ . Réciproquement, si  $x \in \mathbb{R}$  avec  $|x| = 0$ . Alors  $\max(x, -x) = 0$ .  
Donc soit  $x = 0$ , soit  $-x = 0$ . Dans les deux cas, on a  $x = 0$ .

(ii) Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} |xy| &= \begin{cases} xy & \text{si } xy \geq 0 \\ -xy & \text{si } xy \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} xy & \text{si } x, y \text{ de même signe} \\ -xy & \text{si } x, y \text{ de signe contraire} \end{cases} \\ &= \begin{cases} xy & \text{si } x, y \geq 0 \\ xy & \text{si } x, y \leq 0 \\ -xy & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \\ -xy & \text{si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} |x||y| & \text{si } x, y \geq 0 \\ |x||y| & \text{si } x, y \leq 0 \\ |x||y| & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \leq 0 \\ |x||y| & \text{si } x \leq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases} \\ &= |x||y| \end{aligned}$$

(iii) La démonstration de ce point est rigoureusement identique à celui de l'inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$ .

□

### Proposition 2.2 :

Soit  $a, b, x \in \mathbb{R}$ . On a

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

et

$$a \leq x \leq b \implies |x| \leq \max(|a|, |b|)$$

*Démonstration :*

On a

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\iff \max(x, -x) \leq a \\ &\iff \begin{cases} x \leq a \\ -x \leq a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff -a \leq x \leq a$$

et si  $a \leq x \leq b$ , alors  $-b \leq -x \leq -a$  et

$$\begin{aligned} |x| &= \max(x, -x) \\ &\leq \max(b, -a) \\ &\leq \max(|b|, |a|) \end{aligned}$$

□

**Remarque :**

En particulier, on a

$$|x - a| \leq b \iff x \in [a - b, a + b]$$

Donc  $|x - a| \leq b$  correspond à tous les réels à distance plus petite que  $b$  de  $a$ . On obtient donc l'intervalle centré en  $a$  et de longueur  $2b$ .

## 2.2 Partie Entière

Définition-Propriété 2.2 (Partie entière  $[\cdot]$ ) :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la partie entière de  $x$  par

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$$

*Démonstration :*

L'ensemble  $\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$  qui est majoré (par  $x$ ), donc il admet un maximum. Et on appelle partie entière de  $x$  ce maximum. □

**Remarque :**

La partie entière de  $x \in \mathbb{R}$  est donc le plus grand des entiers plus petits que  $x$ . Il existe une version "de l'autre côté" aussi. Qui correspond donc au plus petit entier plus grand que  $x$ . Mais elle est beaucoup moins utilisés.

**Exemple :**

On a les parties entières  $[-1] = -1$  et  $[-1.5] = -2$  et  $[1.5] = 1$ .

La notation du programme est la notation  $\lfloor x \rfloor$  qui est la plus couramment utilisée par les mathématiciens. On utilise parfois également  $\lceil x \rceil$ . Et la notation  $E(x)$  est utile pour parler de la fonction partie entière. Ça permet de lui donner un nom ( $E$ ). Mais il est préférable d'utiliser (ce que je ferais) la notation  $\lfloor x \rfloor$ . Cependant, garder en tête que l'on peut trouver d'autres notations dans la littérature ou dans un sujet.

On pose, pour des questions de notations en tant que fonction :

$$E : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array}$$

**Remarque :**

On peut définir également la partie entière par excès (utilisé souvent en complexité en informatique). On aurait  $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k - 1 < x \leq k\}$ . Donc  $\lceil x \rceil$  est le plus entier plus grand que  $x$ . Mais on se contentera de la partie entière par défaut.

**Proposition 2.3 (Propriété de la partie entière) :**

On a :

- (i)  $\forall x \leq y, \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$  (i.e. la fonction partie entière  $E$  est croissante)
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$

*Démonstration :*

Soit  $x \leq y$  dans  $\mathbb{R}$ . On a donc  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq y$ . Mais  $\lfloor y \rfloor$  est le plus grand entier  $\leq y$ . Donc nécessairement,  $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ . D'où la croissance.

Si  $x = \lfloor x \rfloor$ , alors il est évident que  $x \in \mathbb{Z}$  par définition de  $\lfloor x \rfloor$ . Réciproquement, si  $x \in \mathbb{Z}$ , alors  $x$  vérifie la définition de  $\lfloor x \rfloor$  et par unicité du maximum,  $x = \lfloor x \rfloor$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\lfloor x + k \rfloor - k \leq x + k - k = x$  et  $\lfloor x + k \rfloor - k \in \mathbb{Z}$ , donc, par définition du maximum (ou par croissance et point (ii)),  $\lfloor x + k \rfloor - k \leq \lfloor x \rfloor$ . Donc  $\lfloor x + k \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + k$ . De même, on a  $\lfloor x \rfloor + k \leq x + k$  par définition de la partie entière. Or  $\lfloor x \rfloor + k \in \mathbb{Z}$ , donc, par définition du maximum,  $\lfloor x \rfloor + k \leq \lfloor x + k \rfloor$ . D'où l'égalité.  $\square$

**Proposition 2.4 (Caractérisation de la partie entière  $\lfloor \cdot \rfloor$ ) :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On a équivalence entre

- (i)  $n = \lfloor x \rfloor$
- (ii)  $n \leq x < n + 1$
- (iii)  $x - 1 < n \leq x$

*Démonstration :*

$(i) \Rightarrow (ii)$  Si  $n = \lfloor x \rfloor$ . On a, par définition,  $n \leq x$ . Comme  $n$  est le maximum des  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $m \leq x$ ,  $n + 1$  n'est pas l'ensemble  $\{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$  et donc  $n + 1 > x$ .

$(ii) \Rightarrow (iii)$  Si  $n \leq x < n + 1$ . Alors  $n - 1 \leq x - 1 < n$ . En recollant les deux inégalités, on trouve  $x - 1 < n \leq x$ .

$(iii) \Rightarrow (i)$  Si  $x - 1 < n \leq x$ . On a bien  $n \in \{m \in \mathbb{Z}, m \leq x\}$ . Et si  $m > n$ , alors  $m \geq n + 1 > x$  donc  $m \notin \{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ . Donc  $n$  est le plus grand entier inférieur ou égale à  $x$ , donc  $n = \lfloor x \rfloor$ .  $\square$

**Exemple :**

Exprimer  $\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor$  en fonction de  $\lfloor x \rfloor$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 2.5 (Approximation à  $10^{-n}$  près) :**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors

$$\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

*Démonstration :*

Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$$

ce qui nous donne le résultat.  $\square$

**Remarque :**

Les nombres  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  et  $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$  sont des décimaux. Ils n'ont qu'un nombre fini de chiffres après la virgule ( $n$  exactement en fait).

On voit qu'on obtient alors deux suites de rationnels, l'une croissante et l'autre décroissante, convergente vers  $x$ . Ce sont deux suites d'approximations de réels par des rationnels (l'une par excès et l'autre par défaut). Elles peuvent être utiles. Ce ne sont bien sûr pas les seules suites de rationnels qui convergent vers  $x$ . (On notera tout de suite que ces deux suites sont adjacentes).

Définition 2.3 :

Les nombres  $10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$  et  $10^{-n} (\lfloor 10^n x \rfloor + 1)$  sont appelés partie décimales par défaut et par excès respectivement du réel  $x$  à la précision  $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$ .

**Exemple :**

Le nombre de chiffre dans l'écriture d'un entier  $N \in \mathbb{N}$  en base  $b \geq 2$  est  $k = \lfloor \log_b(N) \rfloor + 1 = \lfloor \frac{\ln(N)}{\ln(b)} \rfloor + 1$ .

### 3 Les ensembles usuels de nombres

#### 3.1 Rappel sur les ensembles de nombres usuels

Les différents ensembles de nombres sont construits les uns à partir des autres.

Définition 3.1 (Les ensembles de nombres) :

On rappelle les définitions :

- L'ensemble des entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$ . Donc  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ .
- L'ensemble des entiers relatifs est noté  $\mathbb{Z}$ , correspondant aux entiers avec un signe. Donc  $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ .
- L'ensemble des décimaux est noté  $\mathbb{D}$ . Il correspond aux nombres pouvant s'écrire avec un nombre fini de décimales, donc un nombre fini de chiffre après la virgule.
- L'ensemble des rationnels est noté  $\mathbb{Q}$ . Il correspond à toutes les fractions possibles à partir de deux entiers relatifs.
- L'ensemble des réels est noté  $\mathbb{R}$ . Il correspond à l'ensemble
- L'ensemble des complexes est noté  $\mathbb{C}$ . Il correspond à l'ensemble des nombres de la forme  $a + ib$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $i$  est un nombre tel que  $i^2 = -1$ .
- [HP] L'ensemble des quaternions est noté  $\mathbb{H}$ . Il correspond aux nombres de la forme  $a + bi + cj + dk$  où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  et  $ij = k, jk = i, ki = j$ .
- [HP] L'ensemble des octonions est noté  $\mathbb{O}$ .

On a donc les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$$

**Remarque :**

La construction des différents ensembles de nombres ne sont pas au programme.

Dans la construction, à chaque étape, on gagne certaines propriétés, mais on en perd d'autres :

- Pour construire  $\mathbb{Z}$ , on ajoute à  $\mathbb{N}$  ce qui manque pour en faire un groupe pour l'addition. La définition de groupe sera vue plus tard. On gagne donc une structure algébrique, une forme de cohérence. Mais on perd des unicités de solutions pour certaines équations.
- L'ensemble  $\mathbb{D}$  n'est que peu intéressant. Il est surtout intéressant comme étant un sous-ensemble de  $\mathbb{Q}$  un peu particulier. Il se conçoit surtout une fois  $\mathbb{Q}$  et certaines de ses propriétés établies, comme étant une sorte d'étape intermédiaire.
- Pour construire  $\mathbb{Q}$  à partir de  $\mathbb{Z}$ , on introduit les éléments manquants pour en faire un corps pour la multiplication.  
On gagne donc une nouvelle structure algébrique. Il y a une sorte de plus grande cohérence encore. Mais on perd toute l'arithmétique. Il n'y a pas de relation de divisibilité, puisque tout rationnel non nul divise tout rationnel. On perd donc la rigidité de la forme des éléments avec l'arithmétique.
- Il y a plusieurs façons de construire les réels à partir des rationnels. Elles sont toutes équivalentes. Toutes les façons de construire les réels aboutissent au même ensemble. Il n'y a donc qu'un seul ensemble  $\mathbb{R}$  (d'où une notation absolue). On va en présenter une plus bas qui est un peu artificielle. Ce n'est pas la plus pratique ni la plus agréable. En générale,  $\mathbb{R}$  est défini comme le complété (du point de vue topologique) de  $\mathbb{Q}$ . C'est-à-dire que  $\mathbb{R}$  correspond à  $\mathbb{Q}$  auquel on rajoute toutes les limites de toutes les suites convergentes de  $\mathbb{Q}$  (il y a des suites de  $\mathbb{Q}$  qui vérifient la définition d'une suite convergente, mais dont la limite n'est pas dans  $\mathbb{Q}$ , comme par exemple la suite définie par  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$  et  $u_0 = 1$  converge vers  $\sqrt{2}$ ).  
Dans les réels, on gagne alors la convergence dans ce même ensemble de toutes les suites convergentes. Les limites sont incluses dans le même ensemble. Mais on perd encore un peu plus le lien avec l'arithmétique.
- Pour construire les complexes, on peut le faire artificiellement comme ce qui a été fait en début d'année. Ce n'est pas très agréable. C'est un peu parachuté comme construction. En général, on utilise deux autres constructions qui sont, elles aussi, équivalentes (on aboutit au même ensemble, à isomorphisme près). L'une des façons classiques de construire  $\mathbb{C}$  est de voir comme l'ensemble  $\mathbb{R}$  auquel on a rajouté toutes les racines possibles de polynômes à coefficients réels. Il existait des polynômes réels qui n'avaient pas de racines (par exemple  $X^2 + 1$ ). Dans  $\mathbb{C}$  tous les polynômes ont des racines. On dit que  $\mathbb{C}$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$ . On peut définir  $\mathbb{C}$  aussi comme le groupe quotient des polynômes réels par l'idéal engendré par  $X^2 + 1$  (cette méthode sera certainement évoquée l'année prochaine). Il existe d'autres façons de construire les matrices. On en verra une autre avec des matrices. Mais c'est plus anecdotique.  
On gagne donc l'assurance de l'existence de solution à des équations polynomiales. Mais on perd la relation d'ordre compatible avec les opérations. On ne peut plus faire d'inégalités qui restent compatibles avec les opérations. Voir une remarque au dessus. Il y a donc tout un tas de manipulation que l'on ne peut plus faire, et on perd un certain nombre de théorèmes.
- Pour fabriquer les quaternions, on perd la commutativité. Ce qui est assez désagréable. Pour les octonions, on perd l'associativité. Ce qui est encore plus désagréable. Ces deux ensembles ne seront pas étudiés. Ils sont là à titre d'information culturelle.

**Exemple :**

Pour exemple de décimaux, on peut prendre  $1.333 \in \mathbb{D}$  mais  $1/3 \notin \mathbb{D}$ . On a aussi  $3/4 \in \mathbb{D}$ .

**Remarque :**

Donc la construction de tous les ensembles de nombres dépend de la construction des entiers naturels, à partir duquel tout est bâti.

**3.2 Les cas des entiers****Définition (HP) 3.2 (Ensemble  $\mathbb{N}$  (Axiomes de Peano))**

Il existe un unique ensemble, à bijection près, noté  $\mathbb{N}$  vérifiant les axiomes suivants :

- (i)  $\mathbb{N}$  est non vide et contient un élément noté 0.
- (ii) Tout élément  $n \in \mathbb{N}$  admet un unique successeur  $s(n)$  ( $s(n) = n + 1$ )
- (iii) Aucun élément de  $\mathbb{N}$  n'admet 0 comme successeur
- (iv) Deux éléments de  $\mathbb{N}$  qui ont le même successeur sont égaux ( $s$  est injective)
- (v) Si  $A \subset \mathbb{N}$  avec  $0 \in A$  et  $\forall n \in A, s(n) \in A$ , alors  $A = \mathbb{N}$  (autrement dit, si  $A$  contient 0 et tous les successeur de ses éléments, alors  $A = \mathbb{N}$ ). [Principe de récurrence]

**Remarque :**

À partir des axiomes de Peano, on peut définir les opérations sur  $\mathbb{N}$  (l'addition d'abord, puis la multiplication). On peut également construire la relation d'ordre usuelle de  $\mathbb{N}$ .

Et à partir de là, on peut construire tous les ensembles de nombres qui suivent de sortes que chaque nouvel ensemble contienne le précédent et que les propriétés restent cohérentes d'un ensemble à l'autre entre relation d'ordre, opération etc.

**Théorème 3.1 ( $\mathbb{N}$  est un ensemble bien ordonné) :**

On a les propriétés suivantes :

- (i) Tout sous-ensemble non vide de  $\mathbb{N}$  admet un minimum. ( $\mathbb{N}$  est bien ordonné)
- (ii) Tout sous-ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{N}$  admet un maximum.
- (iii) Tout sous-ensemble fini non vide de  $\mathbb{Z}$  admet un maximum et un minimum.
- (iv) Tout sous-ensemble non vide et minoré (resp. majoré) de  $\mathbb{Z}$  admet un minimum (resp. un maximum).

**Démonstration :**

- (i) Soit  $A \subset \mathbb{N}$  non vide. Supposons que  $A$  n'admette pas de minimum. Alors  $0 \notin A$  sinon 0 serait le minimum de  $A$  puisque c'est le minimum de  $\mathbb{N}$  (par Peano). Si  $1 \in A$ , alors ce serait le minimum de  $A$  puisque  $0 \notin A$ . Donc  $1 \notin A$ . Et par récurrence, on montre que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, k \notin A$ . Et donc  $A = \emptyset$ . ☹️. Donc  $A$  admet un minimum.

- (ii) Si  $A \subset \mathbb{N}$  non vide et majorée. On peut considérer  $B$  l'ensemble des majorants de  $A$  dans  $\mathbb{N}$ . Alors  $B \neq \emptyset$  par hypothèse. Donc  $B$  admet un minimum  $N$  d'après le point (i). Si  $N \notin A$ , alors  $N-1$  serait également un majorant donc  $N-1 \in B$  et  $N \leq N-1$  car  $N$  est le minimum de  $B$ .  $\text{☹}$ . Donc  $N \in A$ . Et donc  $N$  est le maximum de  $A$ .
- (iii) On procède par récurrence sur le nombre  $n$  d'élément considéré. Il est clair, pour l'initialisation, qu'un singleton a un maximum et un minimum. Ils sont confondu et correspondent à l'élément du singleton considéré. Supposons maintenant que tout sous-ensemble non vide de cardinal  $n$  de  $\mathbb{Z}$  possède un maximum et un minimum, pour un certain  $n \geq 1$ . Considérons alors un ensemble  $Z$  de cardinal  $n+1$ . Soit  $x_0 \in Z$ . Alors  $Z \setminus \{x_0\}$  est un ensemble de cardinal  $n$  et donc a un maximum et un minimum. Soit  $M$  et  $m$  ce maximum et ce minimum respectivement. Donc  $m = \min(Z \setminus \{x_0\})$  et  $M = \max(Z \setminus \{x_0\})$ . Si  $m \leq x_0$ , alors  $m$  est un minimum de  $Z$ , et si  $m > x_0$  alors  $x_0$  est le minimum de  $Z$ . En effet, dans le premier cas, on a  $\forall z \in Z$ ,  $m \leq z$  puisque si  $z \neq x_0$ , alors  $z \in Z \setminus \{x_0\}$  et la définition de  $m$  fonctionne, et si  $z = x_0$ , par hypothèse, on a encore  $m \leq x_0 = z$ . Dans le second cas, tout élément  $z$  de  $Z$  différent de  $x_0$  sera tel que  $x_0 < m \leq z$  et on a bien sûr aussi  $x_0 \leq x_0$ . Donc  $x_0$  est un élément de  $Z$  qui est plus petit que tous les éléments de  $Z$  et donc est le minimum. De même, on en déduit que  $x_0$  ou  $M$  est encore un maximum de  $Z$  selon si  $x_0 > M$  ou non.

Il reste que  $Z$  possède un maximum et un minimum, ce qui achève la démonstration par récurrence.

- (iv) Soit  $A$  un ensemble non vide majoré de  $\mathbb{Z}$ . Si  $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ , alors  $\exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $A \cap \mathbb{Z}_+ \subset \llbracket 0, N \rrbracket$ . Ce sous-ensemble admet un maximum  $M$ . Et  $M$  est encore un maximum pour  $A$ . Si par contre  $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ , alors  $B = \{-a, a \in A\} \subset \mathbb{N}$  et admet donc un minimum  $M$ . Alors dans ce cas  $-M < 0$  sera un maximum pour  $A$  (facile à montrer).

Si  $A$  est minoré, alors  $B = \{-a, a \in A\}$  est majoré. Donc  $B$  admet un maximum  $m$  et  $-m$  sera donc un minimum pour  $A$ .

□

### Théorème 3.2 (Principes des tiroirs) :

Soit  $E$  un ensemble non vide,  $(A_1, \dots, A_n)$  une partition de  $E$  et  $x_0, \dots, x_n \in E$  des éléments deux à deux distincts.

Alors  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $A_k$  contienne au moins deux éléments distincts parmi les  $x_0, \dots, x_n$ .

*Démonstration :*

Si ce n'est pas le cas, alors chaque  $A_k$  contient au plus un élément. Quitte à renuméroter les éléments et les ensembles, on peut supposer  $x_1 \in A_1$ . Comme  $x_2 \in E$  et  $x_2 \notin A_1$ , toujours quitte à renuméroter, on peut supposer  $x_2 \in A_2$ . En réitérant le processus, on a  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_k \in A_k$ . Et  $x_0 \in E = \bigcup_{k=1}^n A_k$ . Mais  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_0 \notin A_k$  car  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_k \in A_k$  et  $A_k$  ne peut contenir qu'un seul élément de la liste au plus. Donc  $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^n A_k = E$ .  $\text{☹}$ . □

Ce principe s'appelle *pigeonhole principle*, en anglais.



Autrement dit, si on a  $n + 1$  paires de chaussettes à répartir dans  $n$  tiroirs, il y aura au moins un tiroir qui contiendra au moins deux paires de chaussettes.

**Exemple :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\forall p_0, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$  deux à deux distincts,  $\exists k, \ell \in \{0, \dots, n\}$ ,  $k \neq \ell$  tels que  $n \mid (p_k - p_\ell)$ . Autrement dit, montrer qu'on peut toujours trouver deux nombres dont la différence est multiple de  $n$  parmi une liste de  $n + 1$  entiers distincts.

**Exemple :**

Soit  $x_1, \dots, x_{13} \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe deux indices distincts  $i, j \in \{1, \dots, 13\}$  tels que

$$0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

**Corollaire 3.3 (Principe des tiroirs) :**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, b - a \geq 1 \implies \mathbb{Z} \cap [a, b] \neq \emptyset.$$

*Démonstration :*

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $b - a \geq 1$ . On pose  $n = \lfloor b \rfloor$ . Alors, par caractérisation de la partie entière,

$$b \geq n > b - 1 \geq a$$

et donc  $n \in [a, b]$ . Donc  $\mathbb{Z} \cap [a, b] \neq \emptyset$ .

Autre méthode : on a  $\lfloor a \rfloor \leq a \leq \lfloor b \rfloor \leq b < \lfloor b \rfloor + 1$ . Donc  $\forall k \in \{\lfloor a \rfloor + 1, \dots, \lfloor b \rfloor\}$ ,  $k \in [a, b]$ . On a donc  $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor - 1 + 1 = \lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor$  entiers dans  $[a, b]$ .  $\square$

### 3.3 Le corps $\mathbb{Q}$

Définition 3.3 (Corps  $\mathbb{Q}$ ) :

On définit l'ensemble  $\mathbb{Q}$  par

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \wedge q = 1 \right\}$$

On définit les lois de composition  $+$  et  $\times$  sur  $\mathbb{Q}$  par :

$$\forall (p, q), (s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{pt + qs}{qt} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{s}{t} = \frac{ps}{qt}$$

Ce sont des lois de composition internes (LCI), i.e.  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b \in \mathbb{Q}$  et  $a \times b \in \mathbb{Q}$ .

On peut donc définir ces opérations comme des fonctions de deux variables

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ (a, b) & \mapsto & a \times b \end{array}$$

Ces opérations vont donc de  $\mathbb{Q}^2$  dans  $\mathbb{Q}$ , elles démarrent de  $\mathbb{Q}$  et restent dedans. Tout se passe à l'intérieur de  $\mathbb{Q}$  (d'où la notion de loi de composition interne).

**Remarque :**

Le fait que ce sont des LCI est à prouver. On aurait pu le dire dans la propriété ci-dessous.

On a alors la propriété suivantes :

**Proposition 3.4 ( $(\mathbb{Q}, +, \times)$  est un corps) :**

La loi de composition interne  $+$  sur  $\mathbb{Q}$  a les propriétés suivantes :

- (i)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$  [Associativité]
- (ii)  $\exists e \in \mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{Q}, a + e = e + a = a$  (ici  $e = 0$ ) [Élément neutre]
- (iii)  $\forall a \in \mathbb{Q}, \exists a' \in \mathbb{Q}, a + a' = a' + a = e$  [Symétrie]
- (iv)  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b = b + a$  [Commutativité]

La loi de composition interne  $\times$  a les propriétés suivantes :

- (v)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$  [Associativité]
- (vi)  $\exists e \in \mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{Q}, a \cdot e = e \cdot a = a$  (ici  $e = 1$ ) [Élément neutre]
- (vii)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  [Distributivité de  $\cdot$  par rapport à  $+$ ]
- (viii)  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a \cdot b = b \cdot a$  [Commutativité]
- (ix)  $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \exists a' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, a \cdot a' = a' \cdot a = e = 1$  [Symétrie]

Toutes ces propriétés regroupent les définitions de plusieurs structures algébriques. Selon celles que l'on regarde, on peut voir, un groupe, un groupe abélien, un anneau, un anneau commutatif, un

$\mathbb{Q}$ -ev et une  $\mathbb{Q}$ -algèbre unitaire commutative et enfin un corps. Ce qui va nous intéresser ici, c'est la structure de corps (toutes les propriétés) et la structure de  $\mathbb{Q}$ -ev (propriétés (i) à (vii)).

On notera que  $\mathbb{Q}_+$  est stable par  $+$  et  $\times$ .

*Démonstration :*

La démonstration n'est qu'un jeu d'écriture. Les vérifications des propriétés des lois de groupes et d'anneaux est, en général, pas très dur, mais extrêmement long. Ce qui est le cas ici. La vérification de chacun de ces points est laissé en exercice.  $\square$

**Proposition 3.5 (Caractérisation des rationnels par la partie décimale) :**

Un réel  $x$  est un rationnel si, et seulement si, sa partie décimale est récurrente à partir d'un certain rang. (i.e. il existe une répétition dans sa partie décimale).

*Démonstration (Sketch) :*

On ne va faire qu'un seul sens et mal. Cette démo ne sera pas complète. On a besoin de plusieurs chapitres ultérieurs pour la faire avec rigueur. On ne contentera d'une approche un peu intuitive en admettant que ce qu'on fait est correct à toutes les étapes.

Montrons que si  $x \in \mathbb{R}$  a une partie décimale périodique à partir d'un certain rang, alors c'est un rationnel. On peut noter alors  $x = N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$  avec  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$  et  $N \in \mathbb{N}$ , le développement décimal infini de  $x$ .

On suppose que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est récurrente à partir d'un certain rang. Autrement dit,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\exists p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $x_{n_0+k+np} = x_{n_0+k}$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 x &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} \\
 &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x_{n_0+k+mp}}{10^{n_0+k+mp}} \right) \\
 &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{k=0}^{p-1} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x_{n_0+k}}{10^{n_0+k+mp}} \right) \\
 &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{x_{n_0+k}}{10^{n_0+k}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(10^p)^m} \right) \\
 &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{x_{n_0+k}}{10^{n_0+k}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} \right) \\
 &= N + \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{10^p x_{n_0+k}}{10^{n_0+k} (10^p - 1)} \in \mathbb{Q}
 \end{aligned}$$

□

**Exemple :**

Par exemple,  $1.3333333\cdots \in \mathbb{Q}$  car il y a une répétition dans sa partie décimale. Et aussi  $1.23546123123123123123\cdots \in \mathbb{Q}$  pour la même raison.

Définition-Propriété 3.4 (Relation d'ordre sur  $\mathbb{Q}$ ) :

On définit une relation binaire sur  $\mathbb{Q}$  noté  $\leq$  par :

$$a \leq b \iff b - a \geq 0 \iff \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ \text{sign}(b - a) = +1 \end{cases}$$

La relation  $\leq$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{Q}$ .

Il y a une petite subtilité conceptuelle dans cette propriété. La notion de " $\geq 0$ " ici est seulement pour regarder le signe de la différence. On ne réutilise donc pas la définition de symbole  $\leq$ . On ne tourne pas en rond. D'où le rajout du dernier bout qui permet d'avoir la définition de l'assertion centrale. Donc pour vérifier si  $a \leq b$  ou non, il faut d'abord calculer la différence  $b - a$ , ce qui a parfaitement un sens et en suite regarder le signe de cette différence, ce qui a également parfaitement un sens. C'est comme ça que l'on peut dire si  $a$  est plus petit ou non que  $b$ .

*Démonstration :*

La démonstration est une vérification facile de la définition d'une relation d'ordre totale. Ne pas oublier de vérifier que c'est une relation totale. □

**Remarque :**

La fonction  $\text{sign} : \mathbb{R}^* \rightarrow \{\pm 1\}$  est très utile. C'est en fait une sorte de fonction caractéristique : on affecte en fait une valeur à la notion de signe d'un réel. Ce qui permet de pouvoir l'utiliser dans des formules. Par exemple, vous avez du coup  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \text{sign}(x)x$ . Attention, aux abus de langage, un signe n'est pas une valeur. Mais tous les réels positifs ont le même signe que 1. Et tous les négatifs, le même que -1. Et 1 et -1 sont souvent pratique dans les formules puisque ils permettent de changer justement le signe d'une expression sans en changer la valeur absolue.

Il n'y a cependant pas de notations canonique pour cette fonction. Certain la note signe, on la voit souvent sous la forme  $\varepsilon$  aussi (surtout dans les "grosses" formules pour gagner un peu de place). Néanmoins la notation `sign` (ou avec le `e`) est suffisamment claire et explicite pour que ce ne soit pas trop grave si vous oubliez de le définir dans un concours. C'est suffisamment clair pour être compris par n'importe qui. Mais le définir en début de problème si vous en avez besoin sera toujours mieux.



Dans  $\mathbb{Q}$ , une partie peut être majoré sans avoir de borne supérieure. Par exemple, si on considère l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$$

Cet ensemble est majoré par 2 (ou par  $3/2$ ) mais pourtant, il n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$  (et donc certainement pas de maximum) (cf exo)

**Exemple :**

Déterminer le maximum, minimum, borne sup, borne inf dans  $\mathbb{Q}$ , s'ils existent, des ensembles suivants :

$$A = \{r \in \mathbb{Q}, r < 1\} \quad B = \{r \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N}, r2^n \in \mathbb{N}\} \quad C = \left\{r \in \mathbb{Q}, r^2 + \frac{r}{2} - \frac{3}{4} \geq 0\right\}$$

**Proposition 3.6 (Propriété de la relation d'ordre sur  $\mathbb{Q}$ ) :**Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Alors

$$(i) \left. \begin{array}{l} a \leq b \leq c \\ \alpha \leq \beta \leq \gamma \end{array} \right\} \implies a + \alpha \leq b + \beta \leq c + \gamma$$

$$(ii) \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ k \in \mathbb{Q}_+ \end{array} \right\} \implies ak \leq bk$$

$$(iii) \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ k \in \mathbb{Q}_- \end{array} \right\} \implies ak \geq bk$$

$$(iv) 0 < a \leq b \implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

$$(v) \left. \begin{array}{l} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{array} \right\} \implies ac \leq bd$$

En fait, dans cette proposition, seuls les points (i) et (ii) sont vraiment importants. Les autres n'étant que des conséquences de ces deux points.

Définition 3.5 (Inégalité stricte) :

On définit l'inégalité stricte sur  $\mathbb{Q}$  par

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b \iff \begin{cases} a \leq b \\ a \neq b \end{cases}$$

**Remarque :**

La relation  $<$  n'est pas une relation d'ordre.

**Proposition 3.7 (Rationnels et irrationnels) :**

On a :

$$(i) \forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \pm r \notin \mathbb{Q}$$

$$(ii) \forall r \in \mathbb{Q}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, rx \notin \mathbb{Q} \text{ et } \frac{1}{x} \notin \mathbb{Q}$$

*Démonstration :*

Soit  $r \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$ . Si  $r + x \in \mathbb{Q}$ , alors  $x = (r + x) - r \in \mathbb{Q}$  car  $\mathbb{Q}$  est stable par addition. Et donc

est

Si  $r \in \mathbb{Q}^*$  et  $x \notin \mathbb{Q}$ , alors  $\frac{1}{x} \notin \mathbb{Q}$  sinon  $x = 1/(1/x) \in \mathbb{Q}$  et si  $rx \in \mathbb{Q}$ , alors  $x = (rx)/r \in \mathbb{Q}$

est

□

!!! ATTENTION !!!



On ne peut rien dire, en général de la somme de deux irrationnels ! Ni de leurs produits ou de leurs quotients !

### Contre-exemple :



Si  $x = \sqrt{2}$  et  $y = r + \sqrt{2}$  avec  $r \in \mathbb{Q}$ , alors  $x, y \notin \mathbb{Q}$  (cf la secte de Pythagore). Mais  $y - x \in \mathbb{Q}$ .

De même,  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  alors que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Etc.

## 3.4 Le corps des réels $\mathbb{R}$

### 3.4.1 Création

Définition-Propriété 3.6 (Création de  $\mathbb{R}$  (démo HP)) :

Il existe un unique corps  $\mathbb{R}$ , à isomorphisme près, contenant  $\mathbb{Q}$ , commutatif pour la multiplication, muni d'une relation d'ordre compatible avec les lois  $+$  et  $\times$  étendant celle de  $\mathbb{Q}$  :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \begin{cases} z \geq 0 \\ x \leq y \end{cases} \implies xz \leq yz$$

et vérifiant la propriété de la borne supérieure :

Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

On appelle ce corps, le corps des réels, noté  $\mathbb{R}$ .

La création de  $\mathbb{R}$  de ce point de vue est largement hors programme. Il semble intéressant d'un point de vue culturel de le mentionner. Et d'un point de vue logique également. Cette proposition fournit une définition de  $\mathbb{R}$  ce qui n'a jamais vraiment été fait jusque là. On sait enfin ce qu'est  $\mathbb{R}$ . On a donc enfin le droit de l'utiliser. Il était temps ...

Donc  $\mathbb{R}$  vérifie deux propriétés :

**Proposition 3.8 (Propriété de la borne sup et inf de  $\mathbb{R}$  [ $\checkmark$ ]) :**

- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

*Démonstration :*

La démonstration du fait que  $\mathbb{R}$  possède cette propriété est très facile : si l'on considère  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  non vide et minoré, alors  $-A = \{-a, a \in A\}$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  majorée, donc a une borne supérieure qui se trouve être l'opposé de la borne inférieure de  $A$ .  $\square$

On rappelle les opérations que l'on peut faire avec les inégalités (ça semble utile ...) :

**Proposition 3.9 (Inégalité dans  $\mathbb{R}$  et opérations) :**

On a les opérations disponibles dans  $\mathbb{R}$  :

- Addition membre à membre :

$$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \implies x + z \leq y + t$$

- Multiplication membre à membre pour des termes **positifs** ! :

$$\forall x, y, z, t \in \underline{\mathbb{R}}_+, \begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \implies xz \leq yt$$

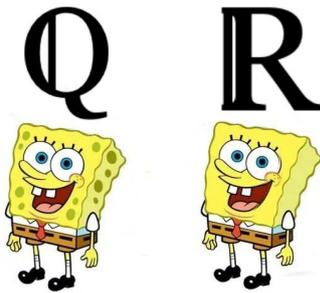
*Démonstration :*

La démo est laissé en exercice, bien sûr. Je ne vous ferais pas l'affront de vous donner la démo ...  $\square$

**Remarque :**

Ce n'est pas la seule façon de construire  $\mathbb{R}$ . Il en existe d'autres qui n'utilise pas les mêmes mécanismes. Toutes ces constructions sont équivalentes : elles permettent toutes de construire le même ensemble  $\mathbb{R}$  (il ne dépend donc pas de la façon dont on le construit) et les autres définitions deviennent alors des propriétés à montrer.

On peut donner comme exemple une autre construction de  $\mathbb{R}$  très classique et courante (c'est en général la première qui est vu). On peut voir  $\mathbb{R}$  comme le complété de  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire qu'on rajoute à  $\mathbb{Q}$  toutes les limites de toutes les suites convergentes de  $\mathbb{Q}$ . L'ensemble ainsi obtenu est  $\mathbb{R}$ .



Il en existe d'autres. Certaines utilisent des polynômes, d'autres n'utilisent que des propriétés algébriques (extensions de corps dans la théorie de Galois par exemple ...).

**Proposition 3.10 (Caractérisation de la borne sup (resp inf) dans  $\mathbb{R}$  [✓]) :**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Alors on a :

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \end{cases}$$

et

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \beta \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \beta \leq a < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

Les inégalités avec le  $\varepsilon$  peuvent être en fait remplacées indifféremment par des inégalités strictes ou des inégalités larges. Ça ne change rien. Il suffit de réduire un petit peu le  $\varepsilon$  pour passer de l'un à l'autre.

*Démonstration :*

On ne va montrer encore une fois que le cas de la borne sup.

$\Rightarrow$  On suppose donc  $\alpha = \sup A$ . Par définition de  $\alpha$ ,  $\alpha$  est un majorant de  $A$ . Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . On a  $\alpha - \varepsilon < \alpha$ , donc ça ne peut être majorant de  $A$ . En effet, si  $\alpha - \varepsilon$  était un majorant, alors, par définition du sup,  $\alpha \leq \alpha - \varepsilon < \alpha$ . Ce qui est impossible. Donc  $\alpha - \varepsilon$  n'est pas majorant. Donc, par définition d'un majorant,  $\exists a \in A$  tel que  $\alpha - \varepsilon \leq a$ .

$\Leftarrow$  Soit donc  $\alpha \in \mathbb{R}$  un majorant de  $A$  tel que  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$ . Il faut montrer que  $\alpha = \sup A$ , c'est à dire que c'est le plus petit des majorants. Soit donc  $M \in \mathbb{R}$  un majorant de  $A$ . On veut montrer que  $\alpha \leq M$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $M < \alpha$ . On pose  $\varepsilon = \alpha - M > 0$ . Donc, par définition de  $\alpha$ ,  $\exists a \in A$  tel que  $\alpha - \varepsilon = M < a$ . Donc  $M$  n'est pas un majorant, ce qui est une contradiction.  $\square$

**Remarque (HP) :**

En fait, à partir de  $\mathbb{Q}$ , on peut montrer qu'il existe un seul corps commutatif totalement ordonné

tel que tout sous-ensemble non vide et majoré (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure) et tel que  $\forall x, y > 0, \exists n \in \mathbb{N}, nx > y$  (principe archimédien). Ce corps contient alors  $\mathbb{Q}$  et l'addition, la multiplication, la soustraction, et la division de  $\mathbb{Q}$  se prolonge sur ce corps. La relation d'ordre totale  $\leq$  de  $\mathbb{Q}$  se prolonge également à ce corps. Ce nouveau corps, est le corps des réels. Mais cette construction est largement hors programme.

**Proposition 3.11 (Caractérisation séquentielle de la borne sup (resp. inf) dans  $\mathbb{R}$ ) :**

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ . Alors

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ majorée et} \\ \alpha = \sup(A) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ majorant de } A \\ \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \end{array} \right.$$

et

$$A \text{ non majorée} \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

**Remarque :**

On peut formuler la même caractérisation pour la borne inf, évidemment.

Cette caractérisation sera démontré un peu plus tard dans le chapitre sur les suites. Elle est un peu en avance par rapport à notre avancement, mais à toute place dans ce chapitre.

**Proposition 3.12 (Ensembles des majorants (resp. minorant) dans  $\mathbb{R}$ ) :**

Si  $A \subset \mathbb{R}$  est majorée (resp. minorée), alors l'ensemble des majorant (resp. minorant) de  $A$  est  $[\sup A, +\infty[$  (resp.  $] - \infty, \inf A]$ .

*Démonstration :*

On ne va traité que le cas des majorants. Donc on suppose que  $A \subset \mathbb{R}$  est majoré. Elle admet donc, par propriété de la borne sup de  $\mathbb{R}$ , une borne supérieure. On appelle  $\mathcal{M}$  l'ensemble des majorants de  $A$ . on a donc  $\sup A \in \mathcal{M}$  par définition de la borne sup. Mais la borne sup étant également le plus petit, on a donc  $\inf \mathcal{M} = \min \mathcal{M} = \sup A$ .

Il est facile de voir que  $\mathcal{M} \subset [\sup A, +\infty[$ . En effet,  $\forall M \in \mathcal{M}$ , on a, par définition de la borne sup,  $\sup A = \inf \mathcal{M} \leq M$ . D'où  $M \in [\sup A, +\infty[$ .

Inversement, si  $M \in [\sup A, +\infty[$ , alors  $\forall a \in A$ , on a  $a \leq \sup A \leq M$ , donc  $M$  est un majorant de  $A$  et donc  $M \in \mathcal{M}$  d'où l'égalité.  $\square$

**Exemple :**

Soit  $A, B \subset \mathbb{R}$  majorées non vides. On définit  $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ .

1. Montrer  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  (ce qui veut dire qu'il faut montrer d'abord que  $A + B$  est majoré puis que la borne sup existe et enfin la relation).

2.  $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$ .
3. Si  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $\sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$  et trouver un exemple de  $A$  et  $B$  pour lequel l'inégalité est stricte.

**Remarque :**

Ce résultat est quasiment une propriété de cours. Mais elle constitue également un bon entraînement de manipulation des notions de ce cours. C'est en fait une propriété de cours dont la démo est un très bon exo. Des résultats analogues sont d'ailleurs dans le TD. Ces résultats sont à connaître, à savoir démontrer et à savoir utiliser aussi. Il existe la même version pour les bornes inf. A démontrer.

Définition 3.7 (Borne sup d'une application, d'une suite  $[\checkmark]$ ) :

Soit  $E$  un ensemble non vide quelconque.

- Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $f$  admet une borne supérieure, notée  $\sup f$ , si  $\text{Im}(f)$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  et dans ce cas,  $\sup f = \sup \text{Im}(f)$ .
- Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle. Si l'ensemble  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  admet une borne supérieure, alors on dira que la famille  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une borne supérieure et on notera  $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Les notions similaires pour la borne inférieure, le maximum et le minimum existent.

**Exemple :**

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . Montrer que  $f$  n'admet pas de borne supérieure ni de maximum mais  $\inf f = \min f = 0$  et il est atteint en  $x = 0$ .

La suite  $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  n'a pas de minimum mais  $\max_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = \sup_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 1$  et  $\inf_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 0$ .

**3.4.2 Intervalles**

Définition 3.8 (Intervalle de  $\mathbb{R}$ ) :

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $x < y$ . Il existe 9 types d'intervalles fermés, ouverts ou semi-ouverts, définis par :

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y\}$$

$$\begin{aligned}
 ]x, y[ &= \{z \in \mathbb{R}, x < z < y\} \\
 [x, y[ &= \{z \in \mathbb{R}, x \leq z < y\} \\
 ]x, y] &= \{z \in \mathbb{R}, x < z \leq y\} \\
 ]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R}, z \leq x\} \\
 ]-\infty, x[ &= \{z \in \mathbb{R}, z < x\} \\
 [x, +\infty[ &= \{z \in \mathbb{R}, x \leq z\} \\
 ]x, +\infty[ &= \{z \in \mathbb{R}, x < z\} \\
 ]-\infty, +\infty[ &= \{z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

**Proposition 3.13 (Caractérisation des intervalles de  $\mathbb{R}$  [✓]) :**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Alors

$$I \text{ intervalle} \iff \forall x, y \in I, \text{ t.q. } x \leq y, [x, y] \subset I$$

et dans ce cas on a

$$I = \begin{cases}
 [\inf I, \sup I] & \text{si } I \text{ est borné et } \inf I \in I \text{ et } \sup I \in I \\
 [\inf I, \sup I[ & \text{si } I \text{ est borné et } \inf I \in I \text{ et } \sup I \notin I \\
 ]\inf I, \sup I] & \text{si } I \text{ est borné et } \inf I \notin I \text{ et } \sup I \in I \\
 ]\inf I, \sup I[ & \text{si } I \text{ est borné et } \inf I \notin I \text{ et } \sup I \notin I \\
 ]-\infty, \sup I] & \text{si } I \text{ est non minoré mais majoré et } \sup I \in I \\
 ]-\infty, \sup I[ & \text{si } I \text{ est non minoré mais majoré et } \sup I \notin I \\
 [\inf I, +\infty[ & \text{si } I \text{ est minoré mais non majoré et } \inf I \in I \\
 ]\inf I, +\infty[ & \text{si } I \text{ est minoré mais non majoré et } \inf I \notin I \\
 ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R} & \text{si } I \text{ n'est ni minoré ni majoré}
 \end{cases}$$

*Démonstration :*

Tout d'abord, il est clair qu'un intervalle vérifie cette propriété.

Supposons que  $I$  soit comme dans la proposition et montrons que  $I$  est un intervalle. Supposons que  $I$  est borné. Alors  $\sup I, \inf I \in \mathbb{R}$  existent. Si en plus  $\sup I \in I$  et  $\inf I \in I$ , alors on a clairement  $I \subset [\inf I, \sup I]$ . D'autre part, par la propriété de  $I$ , on sait aussi que  $[\inf I, \sup I] \subset I$ . D'où l'égalité.

Si par contre, on a  $\sup I \notin I$ , alors,  $\forall \varepsilon > 0$ , tel que  $\varepsilon < \sup I - \inf I$ , on a  $[\inf I, \sup I - \varepsilon] \subset I$ . Donc  $[\inf I, \sup I[ \subset I$  (pour chaque  $x$  de cet intervalle il suffit de prendre  $\varepsilon$  tel que  $\varepsilon = \sup I - x$ ). D'autre part, on a toujours  $I \subset [\inf I, \sup I]$ . Mais comme  $\sup I \notin I$ , on a même en fait  $I \subset [\inf I, \sup I[ = [\inf I, \sup I] \setminus \{\sup I\}$ . D'où l'égalité.

On procède de la même manière sur tous les autres cas. Et il y a  $4+2+2+1=9$  cas (4 bornés, 2 majorés non minorés, 2 minorés non majorés, 1 non majoré non minoré).  $\square$

On peut formuler ce résultat d'une façon plus générale (topologiquement) à l'aide de convexe. Mais c'est hors programme.

Définition 3.9 (Droite réelle achevée) :

On note la *droite réelle achevée*  $\overline{\mathbb{R}}$  et elle correspond à  $\mathbb{R}$  muni "artificiellement" de  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
Donc

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

**Remarque :**

Bien entendu, a strictement parlé, ça n'a pas de sens. Cette notation est une construction topologique (donc HP) très utile car elle permet de simplifier grandement les énoncés ultérieurs, en évitant, notamment pour les limites, des disjonctions de cas. On pourra noter  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  si l'on ne veut pas faire de distinctions de traitement entre limite fini ou infinie. Mais les définitions ne seront évidemment pas les mêmes selon si la limite sera finie ou non.

### 3.4.3 Densité

Définition 3.10 (Partie dense dans  $\mathbb{R}$ ) :

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

$A$  est dite *dense dans*  $\mathbb{R}$  si  $A$  rencontre tout intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , i.e.  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, A \cap ]a, b[ \neq \emptyset$$

**Remarque :**

On note parfois  $\overline{A} = \mathbb{R}$  si  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Attention à ne pas mélanger les notations. Cette notation est une notation topologique qui n'a pas de lien avec la notion de complémentaire de la théorie des ensembles.

La topologie n'est pas au programme cette année. Une petite partie est au programme de MP.

**Théorème 3.14 (Densité des rationnels et des irrationnels dans  $\mathbb{R}$  [✓]) :**

$\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \begin{cases} ]a, b[ \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \\ ]a, b[ \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset \end{cases}$$

ou encore

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists (r, \kappa) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \begin{cases} a < r < b \\ a < \kappa < b \end{cases}$$

On écrira alors souvent  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  en raccourci pour dire que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Cette notation fait appel à des notations de Topologie qui est un domaine des mathématiques qui n'est pas à votre programme. En topologie, on construit  $\mathbb{R}$  comme le complété de  $\mathbb{Q}$ , c'est à dire qu'on le rend connexe, on rajoute toutes les valeurs d'adhérences de toutes les suites de Cauchy (donc convergentes) à valeurs dans  $\mathbb{Q}$ . En gros, on "rebouche" les trous de  $\mathbb{Q}$  (hahaha ...) et le nouvel ensemble obtenu est le complété de  $\mathbb{Q}$  (donc fermé au sens topologique). On l'appelle alors  $\mathbb{R}$ . C'est la méthode la plus accessible pour construire  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration :*

Pour montrer que  $r = p/q \in ]a, b[$  il suffit de trouver  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $]qa, qb[ \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ .

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $q(b-a) > 1$  et  $p = \lfloor qa \rfloor + 1$ . Alors  $qa < p \leq qa + 1 < qa + q(b-a) = qb$ .  
Donc  $a < p/q < b$ .

Pour montrer que  $]a, b[$  contient un irrationnel, on va exploiter l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .

En utilisant le raisonnement précédent, on sait  $\exists r \in \mathbb{Q}$  tel que  $a + \sqrt{2} < r < b + \sqrt{2}$ . On pose alors  $s = r - \sqrt{2}$ . Donc  $s \in ]a, b[$  et  $s \notin \mathbb{Q}$ , sinon  $\sqrt{2} = r - s \in \mathbb{Q}$  ce qui est absurde.  $\square$

### Proposition 3.15 (Les décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$ ) :

Les décimaux sont denses dans  $\mathbb{R}$ , i.e. avec les notations topologiques,

$$\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}.$$

*Démonstration :*

C'est très facile avec les parties entières.

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . On pose  $c = \frac{a+b}{2}$  le milieu de l'intervalle. On sait que  $\frac{\lfloor 10^n c \rfloor}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ .

Donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{\lfloor 10^n c \rfloor}{10^n} - c \right| < \frac{b-a}{2}$$

Alors

$$a < \frac{\lfloor 10^n c \rfloor}{10^n} < b$$

et donc  $]a, b[ \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ .  $\square$

### Proposition 3.16 (Caractérisation séquentielle de la densité dans $\mathbb{R}$ ) :

Soit  $A \subset \mathbb{R}$ .

$A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

*Démonstration :*

Supposons que  $A$  soit dense dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, ]x - 1/10^n, x + 1/10^n[ \cap A \neq \emptyset$ . D'où le résultat.

Réciproquement, soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . On pose  $c = \frac{a+b}{2} \in ]a, b[$ . Alors  $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ . Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - c| \leq \frac{b-a}{2}$$

et donc  $\forall n \geq n_0, a_n \in ]a, b[$ . □

### 3.4.4 Droite réelle achevée

Définition 3.11 (Droite réelle achevée) :

On appelle *droite réelle achevée*, notée  $\overline{\mathbb{R}}$ , l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  sur lequel on étend "naturellement" les propriétés algébriques de  $\mathbb{R}$ .

+	-∞	$y \in \mathbb{R}$	+∞	×	-∞	$y < 0$	0	$y > 0$	+∞
-∞	-∞	-∞	?	-∞	+∞	+∞	?	-∞	-∞
$x \in \mathbb{R}$	-∞	$x + y$	+∞	$x < 0$	+∞	$xy$	0	$xy$	-∞
+∞	?	+∞	+∞	0	?	0	0	0	?
				$x > 0$	-∞	$xy$	0	$xy$	+∞
				+∞	-∞	-∞	?	+∞	+∞

et

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$$

**Remarque :**

Il y aura plein de remarques intéressantes à faire sur la droite réelle achevée du point de vue topologique, mais ce n'est pas au programme.

En ce qui nous concerne, l'intérêt de la droite réelle achevée est surtout de se donner un cadre de travail autorisant un plus grande liberté de notations. Par exemple, en ce qui concerne les limites, il faudrait, idéalement, réécrire tous les résultats selon si la limite est un réelle ou infinie. En se plaçant dans  $\mathbb{R}$ , c'est alors inutile. On peut faire un seul énoncé. En revanche, il faut faire attention au sens qui n'est pas le même selon la nature des éléments en présences (réels ou infinis).

On gagne donc en place et en concision, mais on "cache" un peu le "vrai" sens des choses.