DM 3
Équations Différentielles - Fonctions Usuelles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 7 Novembre 2023

Problème 1 :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le cosinus hyperbolique complexe de z, noté $\mathrm{ch}(z)$, et le sinus hyperbolique complexe de z, noté $\mathrm{sh}(z)$, par

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Établir les relations :
   (i) $\overline{\mathrm{ch}(z)} = \mathrm{ch}(\overline{z})$ et $\overline{\mathrm{sh}(z)} = \mathrm{sh}(\overline{z})$.
   (ii) $|\mathrm{ch}(z)|^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) + \cos(2y))$ et $|\mathrm{sh}(z)|^2 = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) - \cos(2y))$
2. On va étudier plus précisément la fonction cosinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer, si elles existes, les limites de ch en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Montrer que ch établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$. On appelera argch sa fonction réciproque (donc $\mathrm{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$).
   (c) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$ tels que $\mathrm{ch}(x) = y$.
      i. Montrer qu'on a $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ ou $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$.
      ii. En déduire, par l'absurde, que $\mathrm{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ et justifier que cette fonction est bien définie sur $[1, +\infty[$.
3. On pose, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.
   (a) Montrer que th est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les limites de th en $+\infty$ et en $-\infty$ si elles existent.
   (c) Montrer que th établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. On appellera argth sa réciproque.
   (d) Montrer que $\forall y \in]-1, 1[$, $\mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$
4. Soit $x \in]-1, 1[$.
   (a) Justifier que $\mathrm{sh}(\mathrm{argth}(x))$ et $\mathrm{ch}(\mathrm{argth}(x))$ existent.
   (b) Donner une expression simple de $\mathrm{sh}(\mathrm{argth}(x))$.
   (c) Sur quel intervalle la fonction $\tan \circ \arcsin$ est-elle définie ?
   (d) Démontrer alors $\tan \circ \arcsin = \mathrm{sh} \circ \mathrm{argth}$.
5. Soit $x \in [1, +\infty[$.
   (a) Justifier que $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))$ et $\mathrm{th}(\mathrm{argch}(x))$ existent.
   (b) Déterminer une expression simple de $\mathrm{th}(\mathrm{argch}(x))$.
   (c) Donner le domaine de définition de $\tan \circ \arccos$ et déterminer une expression simple de cette fonction.

Problème 2 :
Le but du problème est de résoudre l'équation différentielle

$$(x-1)y' + y = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right) \tag{E}$$

Partie 1 : Étude préliminaire de l'équation différentielle

On pose

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right).$$

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$. Étudier les variations de g.
2. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression simplifié de f.

Partie 2 : Résolution de l'équation homogène

4. Expliciter alors les intervalles sur lesquels on va résoudre l'équation différentielle.
5. Donner les solutions de l'équation différentielle homogène associée à (E)

Partie 3 : Détermination d'une solution particulière

6. Montrer que $x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.
7. Résoudre (E)

Partie 4 : Étude des solutions de l'équation différentielle

8. Comment choisir les constantes pour avoir une solution de (E) qui puisse ne pas avoir de limite infinie en 1 ? On appellera f_0 la solution de (E) avec ces choix de constantes.
9. On considère les fonctions

$$h : x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3\pi}{4}x \quad \text{et} \quad k : x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{4}x.$$

   Justifier que h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

10. En déduire que l'application f_1 définie par

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f_0(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

   est continue sur $\mathbb{R}$.