DM 2
Ensembles
Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 17 Octobre 2023

Problème 1 :
Soit E, F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. On considère $\mathcal{S} = \{X \subset E,\ f^{-1}(f(X)) = X\}$.
   (a) Soit $X \subset E$. Soit $x \in X$. Alors $f(x) \in f(X)$ par définition de l'image directe. Or par définition des images réciproques, $f^{-1}(f(X)) = \{y \in E,\ f(y) \in f(X)\}$. Comme $f(x) \in f(X)$ et $x \in E$, on a donc, par définition, $x \in f^{-1}(f(X))$. Donc, par définition de l'inclusion, $X \subset f^{-1}f(X))$.

   (b) Supposons f injective. Soit $x \in f^{-1}(f(X))$. Par définition de l'image réciproque, $f(x) \in f(X)$. Donc, par définition de l'image directe, $\exists y \in X,\ f(x) = f(y)$. Mais f est injective par hypothèse, donc par caractérisation de l'injectivité $x = y$. Et donc $x \in X$. D'où, par définition de l'inclusion, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.

   Comme, d'après la question précédente, on a aussi $X \subset f^{-1}(f(X))$, on en déduit, par définition de l'égalité entre ensembles, $X = f^{-1}(f(X))$.

   Comme cette relation est vraie pour $X \in \mathcal{P}(E)$ quelconque, on a donc $\forall X \subset E$, $X = f^{-1}(f(X))$. On a donc, par définition de $\mathcal{S}$, $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $X \in \mathcal{S}$. D'où $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{S}$.

   Or, par définition, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$. Donc, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$.

   (c) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a alors

   $$f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = \{x \in E,\ f(x) \in f(f^{-1}(f(A)))\} = \{x \in E,\ \exists y \in f^{-1}(f(A)),\ f(x) = f(y)\}$$

   Or $f^{-1}(f(A)) = \{a \in E,\ f(a) \in f(A)\}$. Donc $y \in f^{-1}(f(A)) \iff f(y) \in f(A)$. Donc

   $$\begin{aligned} f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) &= \{x \in E,\ \exists y \in E,\ f(x) = f(y) \in f(A)\} \\ &= \{x \in E,\ f(x) \in f(A)\} \\ &= f^{-1}(f(A)). \end{aligned}$$

   Donc $f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A))$ et donc, par définition de $\mathcal{S}$, $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.

   (d) Soit $X, Y \in \mathcal{S}$. D'après la première sous-question, on a $X \cap Y \subset f^{-1}(f(X \cap Y))$.

   soit $x \in f^{-1}(f(X \cap Y))$. Alors, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, $f(x) \in f(X \cap Y)$. Donc, par définition de l'image directe d'un ensemble, $y \exists x \in X \cap Y,\ f(x) = f(y)$. En particulier, $y \in X$. Donc $f(y) \in f(X)$. Donc $f(x) \in f(X)$. Donc x est un antécédent d'un élément de $f(X)$ (c'est un antécédent de $f(x)$). Donc, par définition, $x \in f^{-1}(f(X))$. Or $S \in \mathcal{S}$. Donc, par définition de $\mathcal{S}$, $f^{-1}(f(X)) = X$. Donc $x \in X$.

   De même, en reprenant le raisonnement précédent en échangeant X et Y et car $Y = f^{-1}(f(Y))$, on a $x \in Y$. Donc, par définition de l'intersection, $x \in X \cap Y$.

D'où $f^{-1}(f(X\cap Y)) \subset X\cap Y$. Et donc, par définition de l'égalité entre ensemble, $X\cap Y = f^{-1}(f(X\cap Y))$.

D'où finalement, $X\cap Y \in \mathcal{S}$ par définition de $\mathcal{S}$.

On a aussi $X\cup Y \subset f^{-1}(f(X\cup Y))$. Soit $x\in f^{-1}(f(X\cup Y))$. Alors, par définition, $f(x)\in f(X\cup Y)$. Donc $\exists y\in X\cup Y,\ f(x)=f(y)$.

Si $y\in X$, alors $f(x)=f(y)\in f(X)$. Donc $x\in f^{-1}(f(X))=X$. Et si $y\in Y$, alors $f(x)=f(y)\in f(Y)$. Donc $x\in f^{-1}(f(Y))=Y$. On a donc $x\in X$ ou $x\in Y$. Autrement dit, par définition de la réunion, $x\in X\cup Y$. Donc $f^{-1}(f(X\cup Y))\subset C\cup Y$.

D'où $X\cup Y = f^{-1}(f(X\cup Y))$. Et donc $X\cup Y\in\mathcal{S}$.

Donc $\mathcal{S}$ est stable par intersection et par réunion.

(e) Soit $X\subset E$ et $A\in\mathcal{S}$ tels que $X\cap A=\emptyset$. Par définition de $\mathcal{S}$, on a $f^{-1}(f(A))=A$. Donc $X\cap f^{-1}(f(A)) = X\cap A=\emptyset$.

(f) Soit $X,Y\in\mathcal{S}$. On a déjà $E\setminus X\subset f^{-1}(f(E\setminus X))$. Soit maintenant $x\in f^{-1}(f(E\setminus X))$. Donc $f(x)\in f(E\setminus X)$. Donc $\exists y\in E\setminus X$ tel que $f(x)=f(y)$. Supposons maintenant que $x\in X$. Donc $f(y)=f(x)\in f(X)$. Donc y est un antécédent d'un élément de $f(X)$, donc, par définition, $y\in f^{-1}(f(X))$. Or $X\in\mathcal{S}$, donc $y\in X$. Donc $y\in X\cap(E\setminus X)=\emptyset$. Donc ☠. Donc $x\notin X$. Autrement dit $x\in E\setminus X$. Et donc $f^{-1}(f(X))\subset E\setminus X$. D'où l'égalité.

De même, on sait toujours $Y\setminus X\subset f^{-1}(f(Y\setminus X))$. Soit $x\in f^{-1}(f(Y\setminus X))$. Alors $f(x)\in f(Y\setminus X)$. Donc $\exists y\in Y\setminus X$ tel que $f(x)=f(y)$. Mais $Y\setminus X\subset Y$. Donc $f(x)=f(y)\in f(Y)$. Donc, par définition, $x\in f^{-1}(f(Y))=Y$ car $Y\in\mathcal{S}$.

Supposons $x\in X$. Alors $f(x)=f(y)\in f(X)$. Et donc $y\in f^{-1}(f(X))=X$. Or $y\in Y\setminus X$. Donc $y\notin X$. Donc ☠. Donc $x\notin X$.

Finalement, $x\in Y$ et $x\notin X$. Autrement dit, $x\in Y\cap(E\setminus X)=Y\setminus X$. Donc $f^{-1}(f(Y\setminus X))\subset Y\setminus X$. Et d'où l'égalité.

On vient donc de montrer que $E\setminus X=f^{-1}(f(E\setminus X))$ et $Y\setminus X=f^{-1}(f(Y\setminus X))$. Autrement dit, on a montré que $E\setminus X\in\mathcal{S}$ et $Y\setminus X\in\mathcal{S}$.

(g) Soit $\varphi:\mathcal{S}\to\mathcal{P}(f(E))\subset\mathcal{P}(F)$ définie par $\forall A\in\mathcal{S},\ \varphi(A)=f(A)$. Notons que cette application est bien définie. En effet, $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(E)$ et $\forall X\subset E,\ f(X)\in\mathcal{P}(f(E))$. Et par définition de l'image directe, $\varphi(X)$ est unique pour un $X\in\mathcal{P}(E)$ donné.

Soit $A,B\in\mathcal{S}$ tels que $\varphi(A)=\varphi(B)$. Donc, par définition de φ, $f(A)=f(B)$. D'où $A=f^{-1}(f(A))=f^{-1}(f(B))=B$ par définition de $\mathcal{S}$. Et donc φ est injective, par caractérisation de l'injectivité.

Soit $Y\in\mathcal{P}(f(E))$. On pose $A=f^{-1}(Y)\subset E$. Alors, par définition de l'image directe d'un ensemble, $f(A)=f(f^{-1}(Y))=\{f(y),\ y\in f^{-1}(Y)\}\subset Y$. De plus, si $y\in Y$, alors $y\in f(E)$ car $Y\subset f(E)$. Donc $\exists x\in E$ tel que $y=f(x)$. Et donc, par définition de la préimage, $x\in f^{-1}(Y)$. Donc $x\in A$, par définition de A. Et donc, $y=f(x)\in f(A)$. D'où $Y\subset f(A)$. D'où $f(A)=Y$, par définition de l'égalité entre ensemble. Et donc $\varphi(A)=f(A)=Y$.

On a également montré que $f^{-1}(f(A))=f^{-1}(Y)=A$. Et donc, par définition, $A\in\mathcal{S}$. Donc $\exists A\in\mathcal{S}$ tel que $\varphi(A)=Y$. Et donc φ est surjective.

On en déduit que φ est bijective.

On aurait pu le faire aussi en remarquant que $\psi:\mathcal{P}(f(E))\to\mathcal{S}$ définie par $\psi(X)=f^{-1}(X)$ est la réciproque. Mais ce n'est pas évident. Il faut montrer d'abord que cette application est bien définie et ensuite que c'est bien la réciproque à droite et à gauche.

2. On définit, pour tout $x,y\in E$,
$$x\mathcal{R}y \iff f(x)=f(y).$$

(a) La relation $\mathcal{R}$ est une relation binaire. De plus, $\forall x \in E,\ f(x) = f(x)$, par réflexivité de l'égalité. Donc $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$, par définition de $\mathcal{R}$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

Si $x, y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$, alors, par définition, $f(x) = f(y)$. Donc $f(y) = f(x)$ par symétrie de la relation d'égalité. Et donc $y\mathcal{R}x$. Donc $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

Si $x, y, z \in E$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, par définition. Par transitivité de la relation d'égalité, on a donc $f(x) = f(z)$. Et donc $x\mathcal{R}z$. Donc la relation $\mathcal{R}$ est une relation transitive.

Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation binaire, réflexive, symétrique, transitive. Donc, par définition, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

(b) Soit $x \in E$. Par définition, $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E, y\mathcal{R}x\} = \{y \in E,\ f(x) = f(y)\}$. En supposant que f soit injective, on a $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E,\ f(x) = f(y)\} = \{x\}$. Donc les classes d'équivalences sont les singletons. Ce qui n'est pas très intéressant.

(c) On note $\mathcal{C} = \{\mathrm{Cl}(x),\ x \in E\}$. On pose

$$s : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{Cl}(x) \end{array}$$

Bien entendu, s est bien définie. Il n'y a qu'une classe d'équivalence à un $x \in E$ donné (mais il existe beaucoup (a priori) de $x \in E$ tel que $\mathrm{Cl}(x) = C$ pour un $C \in \mathcal{C}$ donné).

Soit $C \in \mathcal{C}$. Par définition de $\mathcal{C}$, $\exists x \in E$ tel que $C = \mathrm{Cl}(x)$. Donc $C = s(x)$. Donc $C \in \mathrm{Im}(s)$. D'où $\mathcal{C} \subset \mathrm{Im}(s)$. Mais, par définition, $\mathrm{Im}(s) \subset \mathcal{C}$. Donc $\mathrm{Im}(s) = \mathcal{C}$ et donc s est surjective.

(d) On a $f(E) \subset F$ car $f : E \to F$. On pose $i : f(E) \to F$ définie par $i(x) = x$. Soit $x, y \in f(E)$ tel que $i(x) = i(y)$. Alors, par définition de i, $x = y$. Donc i est injective (en fait, l'injectivité provient de l'injectivité de Id_F puisque $i = \mathrm{Id}_F\,|_{f(E)}$).

(e) On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & f(E) \\ C & \mapsto & f(x),\ \text{où } x \in X \end{array}$$

Soit $C \in \mathcal{C}$. $\forall x \in C,\ x \in E$ et donc $f(x) \in f(E)$. De plus, si $x, y \in C$, alors, par définition, $f(x) = f(y)$ car $C = \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$ (x et y sont dans la même classe d'équivalence). Donc l'élément de C choisit pour calculer $f(x)$ n'a pas d'importance (tous les éléments de C ont la même image). Autrement dit, $\forall x, y \in C$, $f(x) = f(y)$. Donc $\exists! c \in f(E)$ tel que $\varphi(C) = c$ (avec $c = f(x)$ pour n'importe quel $x \in C$).

Donc φ est bien définie.

(f) On a :

$$E \xrightarrow{s} \mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} f(E) \xrightarrow{i} F$$

Donc $i \circ \varphi \circ s$ a un sens. Et $i \circ \varphi \circ s \in \mathcal{F}(E, F)$. Comme $f \in \mathcal{F}(E, F)$ les deux applications f et $i \circ \varphi \circ s$ sont comparables au sens de l'égalité.

Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} i \circ \varphi \circ s(x) &= i(\varphi(s(x))) && \text{def } \circ \\ &= i(\varphi(\mathrm{Cl}(x))) && \text{def } s \\ &= i(f(x)) && \text{def } \varphi \\ &= f(x) && \text{def } i \end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall x \in E,\ f(x) = i \circ \varphi \circ s(x)$. Et donc, par définition de l'égalité entre applications, $f = i \circ \varphi \circ s$.

En fait, on vient de montrer que l'on peut factoriser toute application par l'ensemble quotient défini par la relation d'équivalence canoniquement associée à l'application f. Et l'application φ de factorisation a les mêmes propriétés que l'application f (injectivité et surjectivité).