DM 3

Équations Différentielles - Fonctions Usuelles

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 7 Novembre 2023

Problème 1 :

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ sous sa forme algébrique. On passe aux conjugués :

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{ch}(z)} &= \overline{\frac{e^z + e^{-z}}{2}} \\ &= \frac{\overline{e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}} + \overline{e^{-\mathfrak{Re}(z)} e^{-i\,\mathfrak{Im}(z)}}}{2} \\ &= \frac{e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{-i\,\mathfrak{Im}(z)} + e^{-\mathfrak{Re}(z)} e^{i\,\mathfrak{Im}(z)}}{2} \\ &= \frac{e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}}{2} \\ &= \operatorname{ch}(\overline{z})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{sh}(z)} &= \frac{\overline{e^z} - \overline{e^{-z}}}{2} \\ &= \frac{e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(\overline{z})\end{aligned}$$

(b) Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}4|\operatorname{ch}(z)|^2 &= |e^z + e^{-z}|^2 \\ &= (e^z + e^{-z})(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}) \\ &= e^{z+\overline{z}} + e^{\overline{z}-z} + e^{z-\overline{z}} + e^{-z-\overline{z}} \\ &= e^{2x} + e^{-2iy} + e^{2iy} + e^{-2x} \\ &= 2\operatorname{ch}(2x) + 2\cos(2y)\end{aligned}$$

d'où la formule annoncée.

On fait la même chose avec le sinus hyperbolique :

$$\begin{aligned}4|\operatorname{sh}(z)|^2 &= (e^z - e^{-z})(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}) \\ &= e^{z+\overline{z}} - e^{z-\overline{z}} - e^{\overline{z}-z} + e^{-z-\overline{z}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{2x} - e^{2iy} - e^{-2iy} + e^{-2x} \\
&= \mathrm{ch}(2x) - 2\cos(2y)
\end{aligned}
$$

ce qui démontre aussi la seconde relation.

2. (a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Il n'y a donc aucune forme indéterminée, ni en $+\infty$, ni en $-\infty$. Les limites existent par sommation de limites finies et $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty = \lim_{-\infty} \mathrm{ch}$.

   (b) D'après l'expression de ch, ch est la somme de deux fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, donc ch est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ qui est positive strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et ne s'annule qu'en 0. Donc ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathrm{ch}(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$. On en déduit donc, par corollaire du TVI (alias théorème de la bijection), que ch établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   (c) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 1$ tel que $\mathrm{ch}(x) = y$.

      i. On a donc
      $$e^x + e^{-x} = 2y \iff e^2x - 2ye^x + 1 = 0$$
      Donc e^x est racine du polynôme $X^2 - 2yX + 1$ dont le discriminant est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0$ puisque $y \geq 1$. On a donc
      $$e^x = \frac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1} \qquad \text{ou} \qquad e^x = y - \sqrt{y^2-1}$$

      ii. On suppose que $e^x = y - \sqrt{y^2-1}$. On a $y \geq 1$, donc $y^2 \geq 1$ donc $y - \sqrt{y^2-1} \geq 0$ donc il n'y a pas de problème à ce niveau là. Mais on a
      $$
      \begin{aligned}
      1 \leq y &\iff 2 \leq 2y \\
      &\iff -2y + 1 \leq -1 \\
      &\iff (y-1)^2 \leq y^2 - 1 \\
      &\iff y - 1 \leq \sqrt{y^2-1}
      \end{aligned}
      $$
      puisque $y \geq 1$. Autrement dit, $y - \sqrt{y^2-1} \leq 1$. Donc $e^x \leq 1$ ce qui impose donc $x \leq 0$. Mais on a $x \geq 0$ par hypothèse. D'où ☠.

      On sait donc désormais que $e^x = y + \sqrt{y^2+1} \geq y \geq 1$ (ce qui convient bien avec $x \geq 0$) et on a donc $x = \mathrm{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. On vient de justifier au passage la bonne définition de cette expression.

3. (a) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, donc th est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   th est le rapport de deux fonctions infiniment dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, donc th est aussi infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables.

   (b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Les deux autres expressions nous permettent alors de lever les indéterminations que nous avions pour les limites de th avec la première expressions et on a facilement
   $$\lim_{-\infty} \mathrm{th} = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{+\infty} \mathrm{th} = 1$$

   (c) On sait que th est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$. Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$ tels que $\mathrm{th}(x) = y$. On a donc
   $$
   \begin{aligned}
   \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y &\iff e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \\
   &\iff (1-y)e^{2x} = y + 1 \\
   &\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}
   \end{aligned}
   $$

$$\iff x = \operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

car $y \in]-1,1[\implies 1- \in]0,2[$ et $\frac{1+y}{1-y} > 0$

4. Soit $x \in]-1,1[$.
   (a) On a $\operatorname{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ et sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc $\operatorname{sh}(\operatorname{argth}(x))$ et $\operatorname{ch}(\operatorname{argth}(x))$ existent.
   (b) On pose $y = \operatorname{argth}(x) \in \mathbb{R}$. Alors $\operatorname{th}(y) = x$. Ce qui nous donne donc $\operatorname{sh}(y) = x\operatorname{ch}(y)$. On a alors $x^2\operatorname{ch}(y)^2 = \operatorname{sh}(y)^2 = \operatorname{ch}(y)^2 - 1$. On en déduit donc $\operatorname{ch}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puisque $\operatorname{ch}(y) \geq 0$. Et par suite, $\operatorname{sh}(y) = \operatorname{sh}(\operatorname{argth}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
   (c) On a $\arcsin :]-1,1[\to]-\pi/2,\pi/2[$ et $\tan :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$. Donc $\tan\circ\arcsin$ est définie sur $]-1,1[$.
   (d) Soit $\theta = \arcsin(x)$. Alors $\sin(\theta) = x$. Donc $\cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2 = 1 - x^2$. Mais $\cos(\theta) \geq 0$ puisque $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$, donc $\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ et par suite $\tan(\arcsin(x)) = \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. On a donc bien l'égalité désirée. Là aussi, on est émue. C'est beau.
5. Soit $x \geq 1$.
   (a) On a $\operatorname{argch} : [1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ et sh et th sont définie sur $\mathbb{R}$. Donc par composition, $\operatorname{th}(\operatorname{argch}(x))$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))$ existent.
   (b) On pose $y = \operatorname{argch}(x)$. Donc $\operatorname{ch}(y) = x$. Alors $x^2 = \operatorname{ch}(y)^2 = 1 + \operatorname{sh}(y)^2$. Donc $\operatorname{sh}(y)^2 = x^2 - 1$. Mais $y \geq 0$, donc $\operatorname{sh}(y) \geq 0$ et donc $\operatorname{sh}(y) = \sqrt{x^2-1}$ puisque $x \geq 1$. On en déduit finalement $\operatorname{th}(\operatorname{argch}(x)) = \operatorname{th}(y) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
   (c) On a $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ et $\arccos(0) = \pi/2$. Comme $\tan$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on déduit donc, par composition, que $\tan\circ\arccos$ est définie sur $[-1,0[\cup]0,1]$. Soit donc $x \in [-1,0[\cup]0,1]$. On pose $\theta = \arccos(x) \in [0,\pi/2[\cup]\pi/2,\pi]$. Alors $\cos(\theta) = x$. Donc $\cos(\theta)^2 = x^2 = 1 - \sin(\theta)^2$ d'où $\sin(\theta)^2 = 1 - x^2$. Mais comme $\theta \in [0,\pi]$, on a $\sin(\theta) \geq 0$ et donc $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$. Finalement, on en déduit donc que $\tan(\theta) = \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Ce qui n'est pas la même chose que la formule de $\operatorname{th}(\operatorname{argch}(x))$. On est très triste.

Problème 2 :
On considère l'équation

$$(x-1)y' + y = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right) \tag{E}$$

Partie 1 : Étude préliminaire de l'équation différentielle

On pose

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$$

1. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [2, +\infty[\\ x & \mapsto & 2(1+x^2) \end{array} \qquad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array} \qquad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array} \qquad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2(1+x^2)}} \end{array} \qquad \text{dérivable par composition}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \qquad \text{dérivable}$$

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

On calcule :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x(x+1)}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{2}(1+x^2)} \\ &= \frac{1+x^2 - x(x+1)}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivants :

x	$-\infty$	-1	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Il reste à justifier les limites :

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \frac{1+1/x}{\sqrt{2(1+1/x^2)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1/\sqrt{2}$$

et aussi,

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \frac{x(1+1/x)}{|x|\sqrt{2(1+1/x^2)}} = \frac{\mathrm{sign}(x)(1+x)}{\sqrt{2(1+x^2)}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. On a $f = \arcsin \circ g$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [\frac{-1}{\sqrt{2}}, 1] \\ x & \mapsto & g(x) \end{array} \qquad \text{dérivable}$$

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & [-\pi/2, \pi/2] \\ y & \mapsto & \arcsin(y) \end{array} \qquad \text{continue}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin \circ g(x) \end{array} \qquad \text{continue}$$

Donc f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ par composition.

De plus, $g(x) = 1 \iff x = 1$, donc, par composition toujours et puisque $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Et on calcule alors :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 1,\ f'(x) &= \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \\ &= \frac{\frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)^2}} \\ &= \frac{(1-x)\sqrt{2(1+x^2)}}{\sqrt{2}(1+x^2)^{3/2}\sqrt{2(1+x^2) - (x+1)^2}} \\ &= \frac{1-x}{(1+x^2)\sqrt{x^2 - 2x + 1}} \\ &= \frac{1-x}{(1+x^2)|x-1|} \\ &= \frac{\text{sign}(1-x)}{1+x^2} \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

3. On rappelle que $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

f étant dérivable sur $]1, +\infty[$, par définition, f est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{1+x^2}$ sur $]1, +\infty[$, de même que $-\arctan$. Donc elles diffèrent d'une constante. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]1, +\infty[,\ f(x) = \lambda - \arctan(x)$.

De même, f est dérivable sur $]-\infty, 1[$, donc f est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $]-\infty, 1[$ et donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-\infty, 1[,\ f(x) = \mu + \arctan(x)$.

On a donc, pour le moment,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \begin{cases} \lambda - \arctan(x) & \text{si } x > 1 \\ \mu + \arctan(x) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

D'autre part, comme $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$,

$$f(x) = \arcsin(g(x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \arcsin(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad f(x) = \arcsin(g(x)) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \arcsin(-1/\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}.$$

Or

$$\lambda - \arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \lambda - \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu + \arctan(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \mu - \frac{\pi}{2}$$

Donc, par unicité de la limite, on a

$$\begin{cases} \lambda - \pi/2 = \pi/4 \\ \mu - \pi/2 = -\pi/4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{3\pi}{4} \\ \mu = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Sans oublié que f est définie en 1 avec $f(1) = \arcsin(1) = \pi/2$, on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} - \arctan(x) & \text{si } x > 1 \\ \frac{\pi}{2} & x = 1 \\ \frac{\pi}{4} + \arctan(x) & x < 1 \end{cases}$$

Partie 2 : Résolution de l'équation homogène

4. L'équation différentielle (E) se ramène à l'équation

$$y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{f(x)}{x-1}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Comme f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, cette équation différentielle est définie sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. On va la résoudre sur ces deux intervalles.

5. L'équation homogène associée à (E) est

$$y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

On va la résoudre sur $]1, +\infty[$ pour commencer. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(x-1)$. Or $\forall x > 1$, $e^{-\ln(x-1)} = \frac{1}{x-1}$, donc les solutions de l'équation homogène sur $]1, +\infty[$ sont les

$$\begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda}{x-1} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

On résout maintenant l'équation homogène sur $]-\infty, 1[$: une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $]-\infty, 1[$ est $x \mapsto \ln(1-x)$ car $1 - x > 0$. Et donc, les solutions de l'équation homogène sur $]-\infty, 1[$ sont les

$$\begin{array}{ccc}]-\infty, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mu}{1-x} \end{array},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions de l'équation différentielle homogène sont les

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\lambda}{x-1} & x > 1 \\ \frac{\mu}{1-x} & x < 1 \end{cases} \end{array},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Partie 3 : Détermination d'une solution particulière

6. On pose $\zeta : x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1 > 0$, ζ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \zeta'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \arctan(x).$$

Donc, par définition, ζ est une primitive de $\arctan$ sur $\mathbb{R}$.

7. Pour résoudre (E), il nous reste seulement à déterminer une solution particulière puisqu'on a déjà trouver les solutions de l'équation homogène à la question 5. On va utiliser la méthode de la variation de la constante.

Soit λ :$]1,+\infty[$ dérivable. On pose $y : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x-1}$. Alors y est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\begin{aligned}
y \text{ sol (E) sur }]1,+\infty[&\iff \forall x>1,\ y'(x)+\frac{1}{x-1}y(x)=\frac{f(x)}{x-1}\\
&\iff \forall x>1,\ \frac{\lambda'(x)}{x-1}-\frac{\lambda(x)}{(x-1)^2}+\frac{\lambda(x)}{(x-1)^2}=\frac{f(x)}{x-1}\\
&\iff \forall x>1,\ \frac{\lambda'(x)}{x-1}=\frac{\frac{3\pi}{4}-\arctan(x)}{x-1} && \text{cf } 3\\
&\iff \forall x>1,\ \lambda'(x)=\frac{3\pi}{4}-\arctan(x).
\end{aligned}$$

On choisit alors $\lambda : x \mapsto \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ en utilisant la question 7. Et donc

$$\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{3\pi}{4}x-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} \end{array}$$

est une solution de (E) sur $]1,+\infty[$.

Et donc les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$ sont les

$$\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\lambda+\frac{3\pi}{4}x-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} \end{array},\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Passons à la résolution de (E) sur $]-\infty,1[$. On va utiliser aussi la méthode de la variation de la constante. Soit donc μ :$]-\infty,1[\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose $y : x\mapsto \frac{\mu(x)}{1-x}$. Alors y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\begin{aligned}
y \text{ sol (E) sur }]-\infty,1[&\iff \forall x<1,\ y'(x)+\frac{1}{x-1}y(x)=\frac{f(x)}{x-1}\\
&\iff \forall x<1,\ \frac{\mu'(x)}{1-x}+\frac{\mu(x)}{(1-x)^2}-\frac{\mu(x)}{(1-x)^2}=\frac{f(x)}{x-1}\\
&\iff \forall x<1,\ \frac{\mu'(x)}{1-x}=\frac{\frac{\pi}{4}+\arctan(x)}{x-1} && \text{cf } 3\\
&\iff \forall x<1,\ \mu'(x)=-\frac{\pi}{4}-\arctan(x).
\end{aligned}$$

On choisit alors $\mu : x\mapsto -\frac{\pi}{4}x - x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Et donc

$$\begin{array}{ccc}]-\infty,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mu-\frac{\pi}{4}x-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1-x} \end{array},\ \mu\in\mathbb{R}$$

sont les solutions de (E) sur $]-\infty,1[$.

On en déduit enfin que les solutions de (E) sont les :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\lambda+\frac{3\pi}{4}x-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} & x>1 \\ \frac{\mu-\frac{\pi}{4}x-x\arctan(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1-x} & x<1 \end{cases} \end{array},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Partie 4 : Étude des solutions de l'équation différentielle

8. Soit y une solution de (E). Donc, d'après la question 8,

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \neq 1,\ y(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} & x > 1 \\ \frac{\mu - \frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

On a

$$\frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \ln(2)/2 = \pi/2 + \ln(2)/2$$

Si $\lambda \neq -\pi/2 - \ln(2)/2$, alors

$$\lambda + \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to 1]{} \lambda + \frac{\pi}{2} + \ln(2)/2 \neq 0$$

et donc

$$y(x) = \frac{\lambda + \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x>1}]{} \pm\infty$$

en fonction du signe de $\lambda + \pi/2 + \ln(2)/2$. Et y n'a pas de limite en 1.

Donc pour que y ait une limite finie en 1, il faut choisir $\lambda = -\pi/2 - \ln(2)/2$.

De même,

$$-\frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \xrightarrow[x\to 1]{} -\frac{\pi}{2} + \ln(2)/2$$

Donc si $\mu \neq \pi/2 - \ln(2)/2$, alors

$$y(x) = \frac{\mu - \frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1-x} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} \pm\infty$$

Donc pour que y ait une limite finie en 1, il faut aussi choisir $\mu = \pi/2 - \ln(2)/2$.

On pose

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{-\frac{\pi}{2} - \ln(2)/2 + \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x-1} & x > 1 \\ \frac{\frac{\pi}{2} - \ln(2)/2 - \frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1-x} & x < 1 \end{cases} \end{array}$$

9. On pose

$$h : x \mapsto \frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad \text{et} \qquad k : x \mapsto -\frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \geq 1 > 0$, par composition, produit et sommes de fonctions dérivables, h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{3\pi}{4} - \arctan(x) \qquad \text{et} \qquad k'(x) = -\frac{\pi}{4} - \arctan(x).$$

10. h et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc elles sont dérivables en particulier en 1. Donc, par définition de la dérivabilité en 1,

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{\frac{3\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\pi}{2} - \ln(2)/2}{x-1} = f_0(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x>1}]{} h'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

et

$$\frac{k(x)-k(1)}{x-1} = \frac{-\frac{\pi}{4}x - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{\pi}{2} - \ln(2)/2}{x-1} = -f_0(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} k'(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$f_0(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi}{2}$$

et donc f_0 a bien une limite finie en 1.

Si on pose alors la fonction f_1 :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f_0(x) & x \neq 1 \\ \pi/2 & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

alors f_1 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car f_0 est continue et f_1 est continue en 1 car $f_1(x) \xrightarrow[x \to 1]{} f_1(1)$. Donc f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.