Chapitre 7 - TD : Suites

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

7 novembre 2023

1 Généralités

Exercice 1 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont convergentes vers ℓ et ℓ' respectivement avec $\ell < \ell'$, alors $u_n < v_n$ APCR.
2. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ et $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$.
3. Si $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n, v_n \leq 1$ et $u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, que peut-on dire pour ces suites ?

Exercice 2 ([✓]) :
Soit (u_n) une suite de réels non nuls telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1. Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.
2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 (Centrale PC (***)) :
Soit $K > 1$, (κ_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0 et $(u_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \kappa_n}{K}$$

1. Montrer que
$$\forall \eta > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{K^{n-n_0}} + \eta \frac{1/K - 1/K^{n-n_0+1}}{1 - 1/K}$$
à l'aide d'une récurrence.
2. En déduire alors que (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 :
Soit (u_n) une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que $u_n \to +\infty$.

Exercice 5 :

1. Établir que
$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$
2. En déduire la limite de
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

2 Limites

Exercice 6 (Calcul de limite) :
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$
2. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
3. $u_n = \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}$
4. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$
5. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
6. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
7. $u_n = \frac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$
8. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
9. $u_n = \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$
10. $u_n = \frac{e^n}{n^n}$
11. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

Exercice 7 :
Étudier
$$\lim_{n \to +\infty} (1 - 1/n)^n, \qquad \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} (1 - 1/n)^m, \qquad \lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} (1 - 1/n)^m$$

Exercice 8 :
Étudier la fonction
$$f : x \mapsto \lim_{n \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} \cos(n!\pi x)^{2m}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que
$$\forall n \geq 4,\ \forall k \in \{2, \ldots, n-2\},\ \binom{n}{k} \geq \frac{n(n-1)}{2}$$
2. En déduire la limite de
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$$

Exercice 10 (Théorème de Césaro) :

1. Démontrer le théorème de Césaro : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente, alors $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de même limite.
2. Montrer que le théorème de Césaro est encore vraie si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente vers $\pm\infty$.

3. La réciproque du théorème de Césaro est-elle vraie ?
4. En déduire le lemme de l'escalier : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
5. Montrer que si $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que (u_{n+1}/u_n) est convergente, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ est convergente et de même limite.
6. Déterminer les limites des suites de terme général :

$$u_n = \binom{2n}{n}^{1/n}, \qquad v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n}}, \qquad w_n = \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n},$$

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}}{n}, \qquad y_n = \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Exercice 11 ([✓]) :
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
3. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exercice 12 :
Soit $\rho > 0$ et $\theta \in]0,\pi[$. on considère la suite complexe définie par $z_0 = \rho e^{i\theta}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

1. Exprimer z_n sous forme d'un produit.
2. Déterminer $\lim z_n$.

Exercice 13 :
Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe $z_n = x_n + iy_n$ montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leur limites.

Exercice 14 :
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le u_n \le \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 15 :
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$. Donc $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$. On suppose que la suite des segments est emboîtée, *i.e.* on suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. De plus, montrer que si $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\exists! x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$.

3 Suites Arithmético-géométrique

Exercice 16 :

Déterminer les expressions en fonction de n des suites suivantes :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - 3u_n$.
2. $z_0 = 1 + i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (2 - 3i)z_n + 5 + i$
3. $v_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)v_n + 1 + \sqrt{2}$

Exercice 17 :

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux de (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4 Suites récurrentes

Exercice 18 :

Déterminer l'expression des termes généraux des suites suivantes :

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
4. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ où $0 < \theta < \pi$.
6. $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}u_n^2}$
7. $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{u_{n+1}+u_n}$.

Exercice 19 ([✓]) :**

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0,\ f(f(x)) = 6x - f(x)$$

1. Soit f une telle fonction. Soit $x_0 > 0$. On définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n.$$

   (b) On suppose que $\mu \neq 0$. Justifier que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ u_n \leq 0$$

   et aboutir à une contradiction.

2. Conclure.

Exercice 20 :
Étudier la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Exercice 21 :
Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = e^{u_n} - 1$$

Exercice 22 :
Étudier la suite définie par

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$$

Exercice 23 ([✓]) :
Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. Montrer que $(|u_n - 1|)$ converge et en déduire la limite de (u_n).

5 Suites extraites

Exercice 24 :
Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas.

Exercice 25 :
Soit (u_n) une suite réelle. Si on suppose que $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$, montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 26 :
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante telle (u_{2n}) converge.
Montrer que u converge.

Exercice 27 (Suites de Cauchy (***)) :
On dit qu'une suite réelle u est de Cauchy (ou satisfait le critère de Cauchy) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Réciproquement, en utilisant le théorème de Weierstrass, montrer que toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 28 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Montrer que (u_n) n'est pas forcément croissante mais qu'on peut en extraire une sous-suite strictement croissante.

Exercice 29 (Théorème d'approximation de Dirichlet (***)) :
Le théorème d'approximation d' Dirichlet est un théorème fondamental en théorie des nombres permettant d'approcher un réel (et de préférence un irrationnel) par une suite de rationnel avec une approximation quadratique. Ce théorème a de nombreuses applications en théorie des nombres. Il est le fondement de la mesure d'irrationnalité d'un nombre réel, qui donne, en quelque sorte, "l'éloignement" d'un réel par rapport aux rationnels.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ 1 \leq q \leq N,\ \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$
Indic : *Considérer les $\lfloor kx \rfloor$ pour $k \in \{1, \ldots, q+1\}$ et utiliser le principe des tiroirs.*
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\exists (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^*)^{\mathbb{N}}$, $\exists (q_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$, tel que $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

6 Négligeabilité, Dominance, Équivalence

Exercice 30 ([✓]) :
Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

1) $\sqrt[n]{n}$	2) $(1+\frac{x}{n})^n$, $(x\in\mathbb{R})$	3) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
4) $n^2\left(\cos(1/n) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$	5) $\tan(\pi/4+\alpha/n)^n$	6) $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$
7) $\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$	8) $(\sin(1/n))^{1/n}$	9) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$
10) $\cos(\pi n e^{\frac{1}{2n}})$	11) $n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$	12) $(1+\sin(1/n))^n$

Exercice 31 :
Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $n^2\left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right)$
2. $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$ où $a, b \geq 0$.
3. $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$

Exercice 32 ([✓]) :
Trouver un équivalent simple aux suites suivantes :

1) $(n+3\ln n)e^{-n-1}$	2) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$	3) $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
4) $\frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{\ln n-2n^2}$	5) $\frac{2n^3-\ln n+1}{n^2+1}$	6) $\frac{n!+e^n}{2^n+3^n}$
7) $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$	8) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$	9) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln n}$
10) $\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$	11) $\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$	12) $\frac{\cos(1/n)-\cos(2/n)}{\ln(1+1/n)-\ln(1+2/n)}$
13) $\binom{2n}{n}$	14) $\sqrt[n]{n!}$	15) $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

Exercice 33 :
Soit $\theta \in]0,\pi/2[$ et
$$u_n = 2^n\sin(2^{-n}\theta) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n\tan(2^{-n}\theta)$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 34 :
On pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$
Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 35 :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k!$$
Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$

Exercice 36 (MINES MP) :
Donner un développement asymptotique de $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$ à 4 termes.

Exercice 37 :
Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que
$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
Déterminer un équivalent simple de u_n.

7 Suites implicites

Exercice 38 :
Montrer que la relation $nu_n^{n+1}-(n+1)u_n^n = 1$ définit une unique suite positive (u_n). Étudier sa convergence et préciser sa limite.

Exercice 39 ([✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les équations

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1 \tag{E_n}$$

1. Montrer que (E_n) possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ et même que $x_n \in [1/2, 1]$.
2. Montrer que (x_n) converge.
3. Déterminer sa limite.

Exercice 40 ([✓]) :

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ a une unique solution dans $I_n =]-\pi/2 + n\pi, n\pi + \pi/2[$.
2. Déterminer un équivalent de x_n
3. Donner un développement asymptotique de 3 termes de x_n.

Exercice 41 (Centrale MP **) :
Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$ notée x_n. Détermine la limite ℓ de x_n, puis un équivalent de $x_n - \ell$.

8 Shampooing (Tout-en-un)

Exercice 42 ([✓]) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1,\ \sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$
3. Calculer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.

Exercice 43 (Constante d'Euler) :
On étudie la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Établir que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$ et en déduire
$$\forall t > 0,\ \ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}$$
2. Observer que
$$\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$$
et en déduire un équivalent simple de S_n.
3. Montrer que la suite $(u_n) = (S_n - \ln n)$ est convergente. Sa limite est appelé Constante d'Euler et notée γ.

Exercice 44 (Irrationalité de e) :
On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

   On admet qu'elles converge vers e (on pourra le montrer une fois qu'on aura vu les Développement limité et les formules de Taylor-Young, Taylor-Lagrange et les autres). On veut montrer par l'absurde que $e \notin \mathbb{Q}$. Donc on suppose que $e = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $a_q < e < b_q$ et en déduire une absurdité.