



Interrogation 7

Relations d'Ordre

Correction

Exercice 1 :

Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une relation d'ordre totale.

Soit E un ensemble (non vide) et \preccurlyeq une relation binaire sur E . \preccurlyeq est dit une relation d'ordre totale si \preccurlyeq est réflexive ($\forall x \in E, x \preccurlyeq x$), antisymétrique ($\forall x, y \in E, (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x \implies x = y)$), transitive ($\forall x, y, z \in E, x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq z \implies x \preccurlyeq z$) et deux éléments quelconque de E sont comparables ($\forall x, y \in E, x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$).

2. Définition d'un majorant.

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné. Soit $A \subset E$. Soit $M \in E$. M est un majorant de A si $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$.

3. Définition de la borne inf.

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble totalement ordonné. Soit $A \subset E$ et $\alpha \in E$. Alors α est une borne inf de A si α est un minorant de A et si $\forall m \in E, m$ minorant de $A \implies m \preccurlyeq \alpha$.

4. Définition de la partie entière.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x , notée $\lfloor x \rfloor$ est définie par $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$.

5. Propriété de la borne inf de \mathbb{R} .

Tout sous-ensemble non vide et minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure (dans \mathbb{R}).

6. Propriétés de la partie entière.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$; $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$; et $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{Z} \iff x = \lfloor x \rfloor$.

7. Définition de la densité dans \mathbb{R} .

Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dit "dense dans \mathbb{R} " si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists a \in A$ tel que $x < a < y$. Ou encore, si $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, A \cap]x, y[\neq \emptyset$.

8. Caractérisation de la borne sup dans \mathbb{R} .

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\sup A$ existe et $\alpha = \sup A \iff \alpha$ majorant de A et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.

Exercice 2 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ admettant un maximum. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que $\max f(A)$ existe et que $\max f(A) = f(\max A)$.

Par définition du max (qui est un majorant), $\forall a \in A, a \leq \max A$. Et donc, par croissance de $f, \forall a \in A, f(a) \leq f(\max A)$. Donc $f(A)$ est majorée (par définition de $f(A)$) par $f(\max A)$. De plus, $\max A \in A$ par définition du max, donc $f(\max A) \in f(A)$.

Donc $f(\max A)$ est un majorant de $f(A)$ dans $f(A)$. Donc par définition $\max f(A)$ existe et par unicité du maximum, $f(\max A) = \max f(A)$.