



# DS 3

## Équations Différentielles - Fonctions Usuelles - Théorie des Ensembles

### Correction

Simon Dauguet  
*simon.dauguet@gmail.com*

Mercredi 15 Novembre 2023

#### Problème 1 (Étude d'une relation fonctionnelle) :

On considère le problème :

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \forall x > 0, f'(x) = xf(1/x) - 1 \end{cases} \quad (P)$$

#### Partie 1 : Résolution d'une équation différentielle

On va étudier l'équation différentielle

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x \quad (E)$$

sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

1. Première méthode : Changement de fonction.

(a) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants. Elle ne rentre pas dans le cadre du cours et ne peut donc être résolue avec les moyens du cours.

On peut toutefois définir l'équation homogène associée

$$x^2 y'' - xy' + y = 0. \quad (EH)$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On définit la fonction  $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\forall x > 0, y(x) = x^a$ . Alors  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée de fonctions qui le sont et

$$\forall x > 0, y'(x) = ax^{a-1} \text{ et } y''(x) = a(a-1)x^{a-2}.$$

On a alors

$$\forall x > 0, x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = (a(a-1) - a + 1)x^a = (a^2 - 2a + 1)x^a = (a-1)^2 x^a.$$

On en déduit donc  $y$  solution de (EH)  $\iff a = 1$ .

Donc  $x \mapsto x$  est solution de (EH).

(b) Soit  $g$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On pose,  $\forall x > 0, f(x) = xg(x)$ .

$f$  est donc le produit de deux fonctions deux fois dérivables. Donc  $f$  est deux fois dérivable. Et

$$\forall x > 0, f'(x) = xg'(x) + g(x) \text{ et } f''(x) = xg''(x) + 2g'(x).$$

On en déduit donc

$$f \text{ solution (E)} \iff \forall x > 0, x^2 f''(x) - xf'(x) + f(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x > 0, x^2(xg''(x) + 2g'(x)) - x(xg'(x) + g(x)) + xg(x) = 2x \\
&\iff \forall x > 0, x^3g''(x) + x^2g'(x) = 2x \\
&\iff \forall x > 0, xg''(x) + g'(x) = \frac{2}{x} \\
&\iff g' \text{ solution de } xy' + y = 2/x.
\end{aligned}$$

(c) On considère l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{2}{x} \quad (\text{F})$$

qui se ramène à l'équation différentielle  $y' + \frac{1}{x}y = 2/x^2$  qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants définis sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

L'équation homogène associée est  $y' + y/x = 0$ . Une primitive de  $x \mapsto 1/x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  est  $x \mapsto \ln(x)$ . Donc les solutions de l'équation homogène sont les  $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \lambda/x$  ou  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Pour trouver une solution particulière, on va utiliser la méthode de la variation de la constante. Soit  $h$  une application dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On définit  $y : x \mapsto h(x)/x$ . Alors  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (F)} &\iff \forall x > 0, y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{2}{x^2} \\
&\iff \forall x > 0, h'(x)/x - h(x)/x^2 + h(x)/x^2 = \frac{2}{x^2} \\
&\iff \forall x > 0, h'(x) = 2/x.
\end{aligned}$$

On considère  $h : x \mapsto 2 \ln(x)$ . Alors  $x \mapsto 2 \ln(x)/x$  est une solution particulière sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc les solutions de (F) sont les

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & \frac{2 \ln(x) + \lambda}{x}, \lambda \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

(d) On reprend la question ii. Soit  $f$  une solution de (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On pose  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ . Alors  $g$  est deux fois dérivable en tant que quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Et  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = xg(x)$ . Et d'après la question ii,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de (E)} &\iff g' \text{ solution de (F)} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, g' : x \mapsto \frac{2 \ln(x) + \lambda}{x} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, g : x \mapsto \ln(x)^2 + \lambda \ln(x) + \mu
\end{aligned}$$

On en déduit donc que les solutions de (E) sont les  $x \mapsto x \ln(x)^2 + \lambda x \ln(x) + \mu x$ , où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

2. Deuxième méthode : Changement de variable.

Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On pose,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $z(t) = y(e^t)$ .

(a) On a :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\
t & \mapsto & e^t \quad \text{deux fois dérivable} \\
\\
\mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\
x & \mapsto & y(x) \quad \text{deux fois dérivable} \\
\\
z : \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\
t & \longmapsto & y(e^t)
\end{array}$$

Par composition,  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Et on  $\forall t > 0$ ,  $z'(t) = y'(e^t)e^t$  et  $z''(t) = (y''(e^t)e^t + y'(e^t))e^t = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$ .

$$y \text{ deux fois dérivable} \iff \forall x > 0, x^2 y''(x) - x y'(x) + y(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x > 0, x^2 y''(x) + xy'(x) - 2xy'(x) + y(x) = 2x \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) - 2e^t y'(e^t) + y(e^t) = 2e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t \\
&\iff z \text{ solution de } y'' - 2y' + y = 2e^t.
\end{aligned}$$

(b) On définit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 2e^t \quad (\text{G})$$

(G) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels définie sur  $\mathbb{R}$  d'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$ .

Donc les solutions de l'équation homogène associée à (G) sont les

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
t &\mapsto (\lambda t + \mu)e^t, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On va chercher une solution particulière à (G) de la forme  $t \mapsto Ct^2 e^t$  ou  $C \in \mathbb{R}$ .

Soit  $C \in \mathbb{R}$ . On pose  $y : t \mapsto Ct^2 e^t$ . Alors  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = C(2t + t^2)e^t$  et  $y''(t) = C(2 + 4t + t^2)e^t$ . Alors

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (G)} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 2e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, C(2 + 4t + t^2 - 4t - 2t^2 + t^2)e^t = 2e^t \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}, 2Ce^t = 2e^t \\
&\iff C = 1
\end{aligned}$$

avec  $t = 0$

Donc  $t \mapsto t^2 e^t$  est une solution particulière de (G).

(c) Soit  $y$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Alors

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de (E)} &\iff t \mapsto y(e^t) \text{ solution de (G)} \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(e^t) = (\lambda t + \mu + t^2)e^t \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = (\lambda \ln(x) + \mu + \ln(x)^2)x
\end{aligned}$$

On retrouve donc les solutions obtenues avec la première méthode.

## Partie 2 : Résolution du problème

Soit  $f$  une solution du problème (P).

3. Comme  $f$  est solution de (P),  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  par hypothèse. Par composition,  $x \mapsto f(1/x)$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et enfin, par produit  $x \mapsto xf(1/x) - 1$  est dérivable. Donc  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Et donc, par définition,  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

4. En dérivant  $f'$ , on a

$$\forall x > 0, f''(x) = f(1/x) - \frac{1}{x}f'(1/x).$$

Or  $\forall x > 0, f'(1/x) = \frac{1}{x}f(x) - 1$  et  $f(1/x) = \frac{1}{x}(f'(x) + 1)$ . Alors

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, f''(x) &= \frac{1}{x}(f'(x) + 1) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}f(x) - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) + \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\forall x > 0, x^2 f''(x) - xf'(x) + f(x) = 2x.$$

Donc  $f$  est une solution de (E) par définition.

5. D'après le début du problème, on peut conclure que

$$f \text{ solution de (P)} \implies f \text{ solution de (E)} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = (\ln(x))^2 + \lambda \ln(x) + \mu x.$$

Mais alors  $\forall x > 0, f'(x) = \ln(x)^2 + (2 + \lambda) \ln(x) + \mu x + \lambda + \mu$  et  $xf(1/x) - 1 = \ln(x)^2 - \lambda \ln(x) + \mu - 1$ . On en déduit alors

$$\begin{cases} 2 + \lambda = -\lambda \\ \mu = 0 \\ \lambda + \mu = \mu - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

D'où

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\ln(x)^2 - \ln(x))x \end{matrix}$$

La vérification est très facile.

On en déduit donc que le problème (P) n'a qu'une unique solution qui est la fonction

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln(x)(\ln(x) - 1) \end{matrix}$$


---

## Problème 2 :

### Partie 1

1. (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$  et donc  $0 < 1 = 5 - 4 \leq 5 - 4 \cos(x) \leq 5 + 4 = 9$ . Donc  $x \mapsto \sqrt{5 - 4 \cos(x)}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

Tout d'abord, si  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x + 2\pi) = f(x)$  par  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$  et  $\sin$ . Par périodicité de  $f$ , on peut donc réduire son étude à  $[-\pi, \pi]$ . Mais on a également,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(-x)}} = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} = -f(x)$$

par parité de  $\cos$  et imparité de  $\sin$ . Donc la fonction  $f$  est impaire. Son graphe est donc symétrique par rapport à l'origine, on peut donc réduire son étude à  $[0, \pi]$ . On obtient son graphe sur  $[-\pi, 0]$  par symétrie. Puis on étend sur  $\mathbb{R}$  par périodicité.

(b) Soit  $x \in [0, \pi]$ . D'après le début de la question précédente,  $5 - 4 \cos(x) \geq 1$ . D'où, par croissance de la fonction racine,  $\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1$ .

De plus, comme  $x \in [0, \pi]$ , on a  $\sin(x) \in [0, 1]$ . Et donc, par produit,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq \sin(x).$$

(c) On a  $f(0) = 0$ . Si  $x \in ]0, \pi]$ , alors

$$f(x) \leq \sin(x) < x$$

Donc l'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solution dans  $]0, \pi]$ . Donc l'unique solution à l'équation  $f(x) = x$  dans  $I$  est  $x = 0$ .

(d) La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc par composition, la fonction  $x \mapsto \sqrt{5 - 4 \cos(x)}$  est dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  (voir question 1a). Par quotient de fonctions dérivable sur  $I$  dont le dénominateur ne s'annule pas, on en déduit que  $f$  est dérivable sur  $I$  également. Et

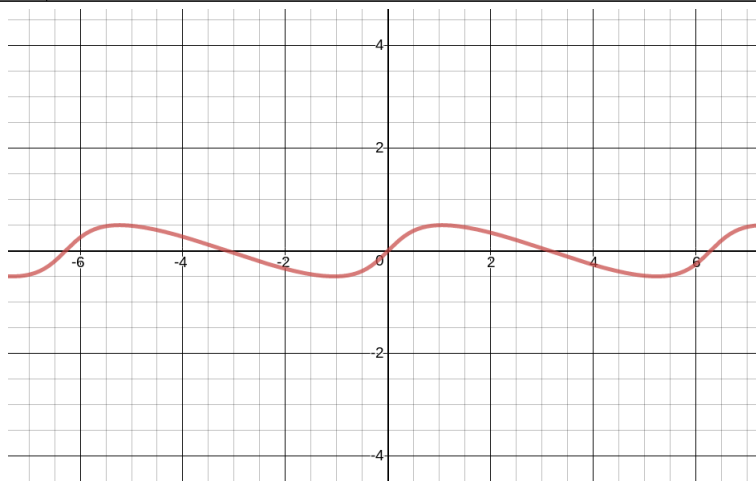
$$\begin{aligned} \forall x \in I, f'(x) &= \frac{\cos(x)\sqrt{5 - 4 \cos(x)} - 2 \frac{\sin(x)^2}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{\cos(x)(5 - 4 \cos(x)) - 2 \sin(x)^2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ &= \frac{5 \cos(x) - 2 \cos(x)^2 - 2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ &= -\frac{2 \cos(x)^2 - 5 \cos(x) + 2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \end{aligned}$$

Le numérateur est un polynôme de degré 2 en  $\cos(x)$  de discriminant  $\Delta = 25 - 16 = 9$  et de racines 2 et  $1/2$ . On en déduit donc, par factorisation,

$$\forall x \in I, f'(x) = -\frac{(\cos(x) - 2)(2 \cos(x) - 1)}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}}.$$

On en déduit donc le tableau de variations

|         |   |                 |       |
|---------|---|-----------------|-------|
| $x$     | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
| $f'(x)$ | + | 0               | -     |
| $f$     | 0 | $\frac{1}{2}$   | 0     |



2. (a)  $\varphi$  est dérivable sur  $[-1, 1]$  comme quotient de fonctions qui le sont donc le dénominateur ne s'annule pas. Et

$$\forall t \in [1, 1], \varphi'(t) = \frac{-5(5 - 4t) + 4(4 - 5t)}{(5 - 4t)^2} = \frac{-9}{(5 - 4t)^2} < 0$$

Donc  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $[-1, 1]$ . Et  $\varphi(-1) = 1$  et  $\varphi(1) = -1$ . D'où le tableau de variations

|               |                                                  |       |     |
|---------------|--------------------------------------------------|-------|-----|
| $t$           | $-1$                                             | $4/5$ | $1$ |
| $\varphi'(t)$ | $-$                                              |       |     |
| $\varphi$     | $1 \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} -1$ |       |     |

(b) On a  $g = \arccos \circ \varphi \circ \cos$ . Or  $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$  et  $\varphi([-1, 1]) = [-1, 1]$ . Donc  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  puisque  $\arccos$  est définie sur  $[-1, 1]$ . Par ailleurs, par  $2\pi$ -périodicité de  $\cos$ ,  $g$  est aussi  $2\pi$ -périodique. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de  $g$  à  $[-\pi, \pi]$ .

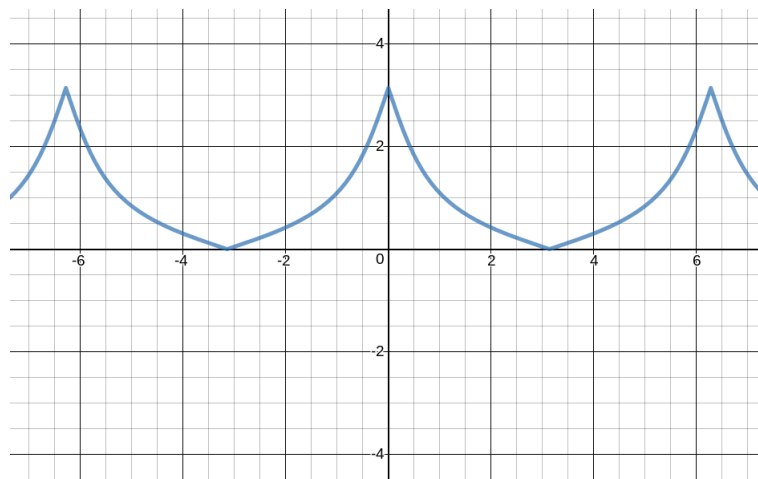
Mais si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $g(-x) = g(x)$  par parité du cosinus. Donc  $g$  est paire. On peut donc l'étudier finalement sur  $[0, \pi]$ . Il suffit de faire ensuite la symétrie de  $g$  par rapport à l'axe des ordonnées pour pouvoir avoir  $g$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  et la  $2\pi$ -périodicité termine le travail.

(c) Par composée d'application dérivable,  $g$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  ( $\arccos$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ ). Et

$$\begin{aligned}
 \forall x \in ]0, \pi[, \quad g'(x) &= \frac{-\frac{9 \sin(x)}{(5-4 \cos(x))^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)}\right)^2}} \\
 &= \frac{-9 \sin(x)(5-4 \cos(x))}{(5-4 \cos(x))^1 \sqrt{(5-4 \cos(x))^2 - (4-5 \cos(x))^2}} \\
 &= \frac{-9 \sin(x)}{(5-4 \cos(x)) \sqrt{9-9 \cos(x)^2}} \\
 &= \frac{-3 \sin(x)}{(5-4 \cos(x)) |\sin(x)|} \\
 &= \frac{-3}{5-4 \cos(x)} < 0 \quad \text{car } x \in ]0, \pi[.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(g) &= g(\mathbb{R}) && \text{définition} \\
 &= g([0, \pi]) && \text{par périodicité et parité} \\
 &= \arccos(\varphi(\cos([0, \pi]))) && \text{car } g = \arccos \circ \varphi \circ \cos \\
 &= \arccos(\varphi([-1, 1])) \\
 &= \arccos([-1, 1]) \\
 &= [0, \pi]
 \end{aligned}$$



3. Soit  $x \in [0, \pi/3]$ .

(a) On a

$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

et

$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2} = \frac{\sqrt{9 - 9 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} = \frac{3|\sin(x)|}{5 - 4 \cos(x)} = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}$$

car  $5 - 4 \cos(x) \geq 0$  et  $\sin(x) \geq 0$  car  $x \in [0, \pi/3]$ .

(b) On en déduit

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5 - 4 \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}}} \\ &= \frac{3 \sin(x) \sqrt{5 - 4 \cos(x)}}{(5 - 4 \cos(x)) \sqrt{5(5 - 4 \cos(x)) - 4(4 - 5 \cos(x))}} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{\sqrt{9(5 - 4 \cos(x))}} \\ &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} g([0, \pi/3]) &= \arccos(\varphi([1/2, 1])) \\ &= \arccos([\varphi(1), \varphi(1/2)]) && \text{car } \varphi \text{ décroissante} \\ &= \arccos([-1, 1/2]) \\ &= \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \end{aligned}$$

On en déduit donc que si  $x \in [0, \pi/3]$ , alors il existe un unique  $y \in [\pi/3, \pi]$  tel que  $f(x) = f(y)$  et  $y = g(x)$  (l'unicité vient de la stricte décroissance de  $g$  sur  $[0, \pi]$  qui en fait donc une application bijective).

## Partie 2

On pose

$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right).$$

4. On considère l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \end{array}$$

Alors  $\psi$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$  par quotient d'applications définies sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas (voir étude de  $\varphi$  de la partie 1). Et même,  $\psi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient d'applications dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'autre part,  $\psi$  est  $2\pi$ -périodique car quotient d'applications  $2\pi$ -périodique. On étudie donc  $\psi$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

Et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = \frac{3 \cos(x)(5 - 4 \cos(x)) - 12 \sin(x)^2}{(5 - 4 \cos(x))^2} = \frac{3(5 \cos(x) - 4)}{(5 - 4 \cos(x))^2}.$$

Soit  $x \in [0, \pi]$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi'(x) \geq 0 &\iff 5 \cos(x) - 4 \geq 0 \\ &\iff \cos(x) \geq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \arccos(\cos(x)) &\leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante} \\ \iff x &\leq \arccos(4/5) && \text{car } x \in [0, \pi] \text{ et } \arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1} \end{aligned}$$

Soit  $x \in [-\pi, 0]$ . Alors

$$\begin{aligned} \psi'(x) \geq 0 &\iff 15 \cos(x) - 12 \geq 0 \\ &\iff \cos(x) \geq 4/5 \\ &\iff \arccos(\cos(x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \arccos \text{ décroissante} \\ &\iff \arccos(\cos(-x)) \leq \arccos(4/5) && \text{car } \cos \text{ pair} \\ &\iff -x \leq \arccos(4/5) && \text{car } -x \in [0, \pi] \\ &\iff x \geq -\arccos(4/5) \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de variations :

|            |        |                 |      |                |       |
|------------|--------|-----------------|------|----------------|-------|
| $x$        | $-\pi$ | $-\arccos(4/5)$ | $0$  | $\arccos(4/5)$ | $\pi$ |
| $\psi'(x)$ |        | $-$             | $0$  | $+$            | $0$   |
| $\psi$     | $0$    |                 | $-1$ | $0$            | $1$   |
|            |        |                 |      |                | $0$   |

D'après le tableau de variation et par  $2\pi$ -périodicité de  $\psi$ , on en déduit donc  $\psi(\mathbb{R}) = \psi([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$ . Or  $\arcsin$  est défini sur  $[-1, 1]$ . Donc  $h = \arcsin \circ \psi$  est défini sur  $\mathbb{R}$ .

Et par  $2\pi$ -périodicité de  $\psi$ ,  $h$  est également  $2\pi$ -périodique. On peut donc l'étudier seulement sur  $[-\pi, \pi]$ .

5. Soit  $x \in [0, \pi]$ . Alors

$$\begin{aligned} \sin(g(x)) &= \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{9 - 9 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} && \text{car } 5 - 4 \cos(x) \geq 0 \text{ cf partie 1} \\ &= \frac{3|\sin(x)|}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} && \text{car } x \in [0, \pi] \text{ donc } \sin(x) \geq 0. \end{aligned}$$

6. Soit  $x \in [0, \pi]$ . D'après la question précédente et par définition de  $\arcsin$ , on a montré

$$\sin(g(x)) = \sin(h(x)).$$

Or  $\arcsin(\sin(h(x))) = h(x)$  car  $h(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Comme  $g(x) \in [0, \pi]$  par définition de  $\arccos$ , on a, d'après l'étude des fonctions de la partie 1 :

$$\begin{aligned} h(x) &= \arcsin(\sin(g(x))) \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ \arcsin(-\sin(g(x) - \pi)) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \in [0, \pi/2] \\ -(g(x) - \pi) & \text{si } g(x) \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} g(x) & \text{si } \frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)} \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \frac{4-5 \cos(x)}{5-4 \cos(x)} \in [-1, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [0, 1] \\ \pi - g(x) & \text{si } \varphi(\cos(x)) \in [-1, 0] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } \cos(x) \in [-1, 4/5] \\ \pi - g(x) & \text{si } \cos(x) \in [4/5, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [\arccos(4/5), \pi] \\ \pi - g(x) & \text{si } x \in [0, \arccos(4/5)] \end{cases}
\end{aligned}$$


---

### Problème 3 (Diamètre d'un ensemble) :

#### Partie 1 : Généralités sur les ensembles

1. Soit  $F$  un ensemble non vide et  $g : F \rightarrow F$  telle que  $g \circ g = g$ .

$(i) \implies (iii)$  Supposons que  $g$  soit injective et montrons que  $g = \text{Id}_F$ . Soit  $y \in F$ . On a donc  $g \circ g(y) = g(g(y)) = g(y)$  et l'injectivité de  $g$  nous donne alors  $g(y) = y$ . Donc  $g = \text{Id}_F$ .

$(ii) \implies (iii)$  Supposons que  $g$  est surjective. Soit  $x \in F$ . La surjectivité de  $g$  nous donne l'existence d'un  $x' \in F$  tel que  $g(x') = x$ . Alors  $g(x) = g \circ g(x') = g(x') = x$ . Donc là encore  $g = \text{Id}_F$ .

Les autres implications sont faites d'offices. En effet, si  $g = \text{Id}_F$ , c'est une bijection et donc une injection et une surjection ce qui nous donne  $(i)$  et  $(ii)$  d'un coup. D'où l'on a  $(i)$  équivalent à  $(iii)$  et  $(ii)$  équivalent à  $(iii)$  ce qui fournit du coup aussi l'équivalence aussi entre  $(i)$  et  $(ii)$  en passant pas  $(iii)$ .

2. Soit  $E$  un ensemble non vide,  $A, B \subset E$  et  $f : X \mapsto (X \cap A) \cup B$ .

(a) On calcule

$$f(\emptyset) = (A \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

et

$$f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B$$

et aussi

$$f(B) = (A \cap B) \cup B = B$$

car  $A \cap B \subset B$ .

(b) Soit  $X, X' \subset E$  tels que  $X \subset X'$ . Il faut donc comparer  $f(X) = (A \cap X) \cup B$  et  $f(X') = (A \cap X') \cup B$ . Il faut donc commencer par comparer  $A \cap X$  et  $A \cap X'$ . Comme  $X \subset X'$ , on a  $A \cap X \subset A \cap X'$ . Donc  $(A \cap X) \cup B \subset (A \cap X') \cup B$ . En effet, si  $x \in (A \cap X) \cup B$ , soit  $x \in B$  et donc  $x \in (A \cap X') \cup B$ , ou soit  $x \in (A \cap X) \subset (A \cap X')$  et donc  $x \in (A \cap X') \cup B$ . Quoi qu'il en soit,  $f(X) \subset f(X')$ . Et donc  $f$  est croissante.

(c) Soit  $Y \subset E$ . On va montrer que  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$ . Ce qui démontrera les équivalences voulues.

$(i) \implies (ii)$  On suppose donc que  $Y$  a un antécédent par  $f$ . Donc  $\exists X \subset E$  tel que  $f(X) = (A \cap X) \cup B = Y$ . On a alors  $B \subset B \cup (A \cap X) = Y$  ce qui montre la première inclusion. Et aussi  $A \cap X \subset A \subset A \cup B$ . Donc  $f(X) \subset B \cup (A \cup B) = A \cup B$ . D'où  $Y \subset A \cup B$ .

$(ii) \implies (iii)$  On suppose  $B \subset Y \subset (A \cup B)$ . On a d'abord facilement  $f(Y) \subset Y$ . En effet, si  $y \in f(Y)$ , alors soit  $y \in B \subset Y$ , donc  $y \in Y$ , soit  $y \in A \cap Y \subset Y$ , donc  $y \in Y$  également. Il faut donc montrer l'inclusion inverse, c'est à dire montrer que  $Y \subset f(Y) = (A \cap Y) \cup B$ . Mais comme  $B \subset Y$ , on peut écrire que  $Y = B \cup (Y \setminus B)$ . Si  $y \in Y$ , alors soit  $y \in B$ , soit  $y \in Y \setminus B$ .

Si  $y \in B$ , alors forcément  $y \in (A \cap Y) \cup B = f(Y)$ .

Si  $y \in Y \setminus B$ , alors  $y \in Y$  en particulier, donc  $y \in (A \cup B)$ . Donc  $y \in A$  ou  $y \in B$ . Mais  $y$  ne peut pas être dans  $B$  puisque  $y \in Y \setminus B$  et  $B \subset Y$ . Donc  $y \in A$ . Mais  $y$  est toujours dans  $Y \setminus B \subset Y$ . Donc  $y \in (A \cap Y)$  et donc  $y \in f(Y)$ . D'où  $Y \subset f(Y)$  ce qui montre l'égalité.

(iii)  $\implies$  (i) On suppose donc que  $f(Y) = Y$ . Donc  $Y$  est l'image d'un élément de  $\mathcal{P}(E)$  par  $f$ . Donc  $Y$  a un antécédent (qui se trouve être lui même). D'où le (i).

(d) On a facilement  $f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B$  et  $f(B) = (A \cap B) \cup B = B$  car  $A \cap B \subset B$ . Donc pour que  $f$  soit constante, il nous faut  $A \cup B = B$ , c'est à dire  $A \subset B$ . On a donc une condition nécessaire. On va maintenant montrer que cette condition est suffisante.

Supposons donc que  $A \subset B$  et montrons que  $f$  est constante. Soit  $X \subset E$ . Alors  $f(X) = (A \cap X) \cup B$ . Mais  $A \cap X \subset A \subset B$ . Donc  $(A \cap X) \cup B = B$  et donc  $\forall X \subset E, f(X) = B$ .

(e) On a  $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ . Pour que  $f$  soit surjective, il faut en particulier que  $E \in f(\mathcal{P}(E))$ , i.e.  $E$  doit avoir un antécédent par  $f$ , c'est-à-dire qu'il doit y avoir un  $X \subset E$  tel que  $f(X) = (A \cap X) \cup B = E$ . Mais on a dit que  $f$  est croissante, donc on doit avoir  $f(E) = (A \cap E) \cup B = A \cup B = E$ . Mais  $\emptyset$  doit aussi avoir un antécédent. Par croissance de la fonction, on doit donc avoir  $f(\emptyset) = B = \emptyset$ . La condition nécessaire pour que  $f$  soit surjective est donc  $A = E$  et  $B = \emptyset$ . On va donc montrer qu'elle est suffisante.

Supposons donc que  $A = E$  et  $B = \emptyset$ . Soit  $X \subset E$ . Alors  $f(X) = (A \cap X) \cup B = (E \cap X) \cup \emptyset = X$ . Donc  $X$  a un antécédent par  $f$  et donc  $f$  est surjective.

(f) Pour voir ce que fait  $f \circ f$ , il faut calculer ce que fait cette fonction sur un ensemble  $X \subset E$ . Soit donc  $X \subset E$ . Alors

$$\begin{aligned} f \circ f(X) &= f(f(X)) \\ &= (A \cap f(X)) \cup B \\ &= (A \cap ((A \cap X) \cup B)) \cup B \\ &= (A \cap (A \cap X) \cup (A \cap B)) \cup B \\ &= (A \cap X) \cup B \\ &= f(X) \end{aligned}$$

car  $A \cap B \subset B$ . Donc  $f \circ f = f$ .

(g) Commençons par le sens indirecte. Supposons  $A = E$  et  $B = \emptyset$ . Alors

$$\forall X \subset E, f(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X$$

donc  $f = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$  et donc  $f$  est bijective.

Réciproquement, supposons que  $f$  est bijective. Comme elle est idempotente, d'après la question précédente, cela revient à dire que  $f = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ . En particulier,  $\emptyset = f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = B$ . On en déduit donc facilement  $B = \emptyset$ . Enfin  $E = f(E) = E \cap A = A$  nous donne l'autre condition.

## Partie 2 : Diamètre d'un ensemble

3.  $A$  est non vide et bornée dans  $\mathbb{R}$ , donc  $\sup A$  et  $\inf A$  existent par propriété de la borne sup et inf de  $\mathbb{R}$ .

(a)  $A$  étant non vide, on sait qu'il existe  $a \in A$ . Alors  $0 = |a - a| \in \mathcal{D}_A$ . Et donc  $\mathcal{D}_A \neq \emptyset$ .

On sait que  $A$  est majorée. Soit  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in A, |x| \leq M$ . Alors  $\forall x, y \in A, |x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M$  par inégalité triangulaire. Par conséquent,  $\mathcal{D}_A$  est majorée dans  $\mathbb{R}$ .

Donc  $\mathcal{D}_A$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ , donc  $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$  existe par propriété de la borne sup de  $\mathbb{R}$ .

Au passage, comme  $\forall x \in A, x \geq 0$ , on a  $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}_+$ . Et  $0 \in \mathcal{D}_A$ . Donc  $\mathcal{D}_A$  est minorée et  $\inf \mathcal{D}_A = 0 = \min \mathcal{D}_A$ .

(b) On sait que  $\forall a \in A, \inf A \leq a \leq \sup A$ . Et donc,  $\forall b \in A, -\sup A \leq -b \leq -\inf A$ . Et donc, par sommation des inégalités,  $\forall a, b \in A, \inf A - \sup A \leq a - b \leq \sup A - \inf A$ . Autrement dit,  $\forall a, b \in A, |a - b| \leq |\sup A - \inf A|$ . Mais bien sûr, comme  $\sup A \geq \inf A$ , on a donc  $|\sup A - \inf A| = \sup A - \inf A$ . Donc  $\forall x \in \mathcal{D}_A, x \leq \sup A - \inf A$ . Donc  $\sup A - \inf A$  est un majorant de  $\mathcal{D}_A$ . Et par définition de la borne sup de  $\mathcal{D}_A$ ,  $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$ .

(c) On suppose qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  majorant de  $\mathcal{D}_A$  tel que  $M < \sup A - \inf A$ . Comme  $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}_+$ , alors  $M \geq 0$ . On pose  $\varepsilon = \frac{\sup A - \inf A - M}{2} > 0$ . Donc  $\exists a, b \in A$  tels que  $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$  et  $\inf A \leq b < \inf A + \varepsilon$ . Ce qui nous donne  $-\inf A - \varepsilon < -b \leq -\inf A$ . Et donc, par sommation des inégalités,  $\sup A - \varepsilon - \inf A - \varepsilon = \sup A - \inf A - 2\varepsilon = M < a - b \leq \sup A - \inf A$ .

Par ailleurs, comme  $M \geq 0$ , on en déduit  $a - b \geq 0$  et donc  $|a - b| = a - b$ . Donc  $a - b \in \mathcal{D}_A$ . Et donc  avec la définition de  $M$  majorant de  $\mathcal{D}_A$ .

Donc  $\sup A - \inf A$  est le plus petit des majorants de  $\mathcal{D}_A$  et donc  $\delta(A) = \sup A - \inf A$  par définition de la borne sup.

4. Comme  $B$  est non vide et bornée,  $\sup B$  et  $\inf B$  existe par propriété de la borne sup et inf de  $\mathbb{R}$ .

(a) On sait que  $\forall a \in A, a \in B$ . Donc  $\forall a \in A, \inf B \leq a \leq \sup B$  par définition de la borne sup et inf de  $B$ .

Donc  $\sup B$  est un majorant de  $A$ . Et la def  $\sup A$  nous fournit alors  $\sup A \leq \sup B$ . De même,  $\inf B$  est un minorant de  $A$ , donc  $\inf B \leq \inf A$  par définition de  $\inf A$ . On en déduit donc,  $\forall a \in A, \inf B \leq \inf A \leq a \leq \sup A \leq \sup B$ . Ce qui nous fournit les inégalités désirées.

(b) Comme  $B$  est non vide et bornée, on peut appliquer la question précédente et  $\delta(B)$  existe. On a alors aussi  $\delta(B) = \sup B - \inf B$ .

Par ailleurs, les inégalités de la question précédente nous fournissent  $\delta(A) = \sup A - \inf A \leq \sup B - \inf A \leq \sup B - \inf B = \delta(B)$ . En effet, on a  $-\inf A \leq -\inf B$ .

5. (a)  $A$  est non vide donc  $A \cup B$  est non vide puisque  $A \subset A \cup B$ . On considère  $M, M' \in \mathbb{R}$  une borne de  $A$  et de  $B$ . Alors  $\forall x \in A \cup B, |x| \leq M + M'$ . Donc  $A \cup B$  est bornée. Donc  $\delta(A \cup B) = \sup(A \cup B) - \inf(A \cup B)$  existe par la question 1.

On rappelle, comme dans une remarque un peu plus haut que  $\delta(A) \geq 0$  et  $\delta(B) \geq 0$ .

Pour montrer l'inégalité demandée, on va faire une disjonction de cas. Soit  $r \in \mathcal{D}_{A \cup B}$ . Donc  $\exists x, y \in A \cup B$  tels que  $r = |x - y|$ . Il y a donc quatre cas possible.

- Si  $x, y \in A$ .  
Alors  $r = |x - y| \in \mathcal{D}_A$  et donc  $r \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B)$ .
- Si  $x \in B$  et  $y \in B$ .  
Alors  $r = |x - y| \in \mathcal{D}_B$ . Donc  $r \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$ .
- Si  $x \in A$  et  $y \in B$ .  
On sait que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Soit donc  $\alpha \in A \cap B$ . Alors  $r = |x - y| \leq |x - \alpha| + |\alpha - y|$  par inégalité triangulaire. Mais  $|x - \alpha| \in \mathcal{D}_A$  et  $|\alpha - y| \in \mathcal{D}_B$ . Donc  $r \leq \delta(A) + \delta(B)$ .
- Si  $x \in B$  et  $y \in A$ .  
On raisonne de la même manière :  $r \leq |x - \alpha| + |\alpha - y| \leq \delta(B) + \delta(A)$ .

On vient de montrer que dans tous les cas,  $r \leq \delta(A) + \delta(B)$ . Ce qui termine la démonstration.

6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est 1-Lipschitzienne.

(a) On sait que  $A \neq \emptyset$ . Donc  $\exists x_0 \in A$ . Alors  $f(x_0) \in f(A)$ . Et donc  $f(A) \neq \emptyset$ . Et  $\forall x \in A, |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq \delta(A) + |x_0|$ . Et  $\delta(A) + |x_0|$  est indépendant de  $x \in A$ . C'est donc une borne de  $f(A)$ .

(b) On peut appliquer la question 1 et  $\delta(f(A))$  existe. Soit  $\alpha \in \mathcal{D}_{f(A)}$ . Alors  $\exists x, y \in f(A)$  tels que  $\alpha = |x - y|$ . Et  $\exists a, b \in A$  tels que  $x = f(a)$  et  $y = f(b)$  par définition de  $f(A)$ .

On en déduit donc  $\alpha = |x - y| = |f(a) - f(b)| \leq |a - b| \leq \delta(A)$ . Et  $\delta(A)$  ne dépend pas de  $\alpha$ . Donc  $\forall \alpha \in \mathcal{D}_{f(A)}, \alpha \leq \delta(A)$ . Donc  $\delta(A)$  est majorant de  $\mathcal{D}_{f(A)}$  et finalement, la définition de  $\delta(f(A))$  nous donne  $\delta(f(A)) \leq \delta(A)$ .