DS 3
Équations Différentielles - Fonctions Usuelles - Théorie des Ensembles

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 15 Novembre 2023

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Problème 1 (Étude d'une relation fonctionnelle) :
Le but de ce problème est d'étudier les solutions du problème :

$$\begin{cases} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \forall x > 0,\ f'(x) = xf(1/x) - 1 \end{cases} \tag{P}$$

Partie I : Résolution d'une équation différentielle.

On se propose de résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' + y = 2x. \tag{E}$$

1. Première méthode : Changement de fonction.
   (a) Montrer que l'équation homogène associée à (E)
   $$x^2y'' - xy' + y = 0 \tag{EH}$$
   possède une solution sous la forme $y(x) = x^a$, où a est une constante que l'on déterminera.
   (b) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^a g(x)$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, g' est solution de l'équation différentielle (F) suivante :
   $$xy' + y = \frac{2}{x} \tag{F}$$

(c) Résoudre (F) sur $\mathbb{R}_+^*$.

(d) Conclure.

2. Deuxième méthode : Changement de variable.

Si y est une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonctions z sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(e^t).$$

(a) Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle (G) suivante :

$$y'' - 2y' + y = 2e^t. \tag{G}$$

(b) Résoudre l'équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$.

(c) Conclure.

Partie II : Résolution du problème (P)

Soit f une solution du problème (P).

3. Montrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E).
5. Conclure.

Problème 2 :

Partie 1

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4\cos(x)}}.$$

1. Étude de f.

(a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = [0, \pi]$.

(b) Étudier le signe de $f(x) - \sin(x)$ sur l'intervalle I.

(c) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur I.

Indic : *On rappelle que* $\forall x \in]0, \pi],\ \sin(x) < x$.

(d) Étudier les variations de f sur I et tracer l'allure du graphe de f sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5\cos(x)}{5 - 4\cos(x)}\right).$$

2. Étude de g.

(a) Étudier les variations de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{4-5t}{5-4t} \end{array}$$

(b) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'on peut restreindre son étude à I.

(c) Montrer que g est dérivable sur $]0,\pi[$ et calculer sa dérivée. Déterminer l'image de g et tracer l'allure du graphe de g.

3. Soit $x \in [0,\pi/3]$.

(a) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

(b) Calculer $f(g(x))$. Déterminer aussi $g([0,\pi/3])$. Que peut on en conclure ?

Partie 2

On pose
$$h(x) = \arcsin\left(\frac{3\sin(x)}{5-4\cos(x)}\right).$$

4. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi,\pi]$.
5. Soit $x \in [0,\pi]$. Calculer $\sin(g(x))$.
6. Montrer que :
$$\forall x \in [0,\pi],\ h(x) = \begin{cases} \pi - g(x) & x \in [0, \arccos(4/5)] \\ g(x) & x \in [\arccos(4/5), \pi] \end{cases}$$

Problème 3 (Diamètre d'un ensemble) :

Partie 1 : Généralités sur les ensembles

1. Soit F un ensemble non vide. Soit $g : F \to F$ telle que $g \circ g = g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) g est injective

(ii) g est surjective

(iii) $g = \mathrm{Id}_F$

2. Soit E un ensemble non vide quelconque, $A, B \subset E$ et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par : $\forall X \subset E$, $f(X) = (X \cap A) \cup B$.

(a) Calculer $f(\emptyset)$, $f(A)$ et $f(B)$.

(b) Montrer que la fonction f est croissante au sens de l'inclusion, *i.e.* montrer que $\forall X, X' \subset E$, $X \subset X' \implies f(X) \subset f(X')$.

(c) Soit $Y \subset E$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Y admet un antécédent par f dans $\mathcal{P}(E)$.

(ii) $B \subset Y \subset (A \cup B)$

(iii) $f(Y) = Y$

(d) Montrer que f est constante si, et seulement si, $A \subset B$.

(e) Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A = E$ et $B = \emptyset$.

(f) Calculer $f \circ f$.

(g) Montrer alors que f est bijective si, et seulement si, $A = E$ et $B = \emptyset$.

Partie 2 : Diamètre d'un ensemble

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée.

3. On note $\mathcal{D}_A$ l'ensemble des distances entre deux éléments de A, i.e.

$$\mathcal{D}_A = \{|x - y|, x, y \in A\}$$

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure. On note $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ que l'on appelle diamètre de A.

   (b) Montrer que $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$.

   (c) On veut montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$. On raisonne par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ majorant de $\mathcal{D}_A$ tel que $M < \sup A - \inf A$. Montrer alors qu'on aboutit à une contradiction et conclure.

4. Soit $B \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $A \subset B$.

   (a) Montrer que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

   (b) Montrer alors que $\delta(A) \leq \delta(B)$.

5. Soit $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \emptyset$ bornée et telle que $A \cap B \neq \emptyset$.

   (a) Justifier que $\delta(A \cup B)$ éxiste.

   (b) Montrer alors que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ (on dit que f est 1-Lipschitzienne).

   (a) Montrer que $f(A) \neq \emptyset$ et bornée.

   (b) Montrer $\delta(f(A)) \leq \delta(A)$.