Lycée Loges

Chapitre 8 - TD

Groupes - Anneaux - Corps

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

21 novembre 2023

1 Groupes

Exercice 1 (Loi de composition) :
On définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \star b = \ln(e^a + e^b).$$

Quelle sont les propriétés de cette loi ? Y a-t-il un élément neutre ?

Exercice 2 :
Dire si les ensembles suivants sont des groupes ou non :

1. L'ensemble des bijections continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi $\circ$
2. L'ensemble des bijections dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la loi $\circ$
3. $\{a + \omega b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ muni de la loi $+$
4. $\{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $a \in \mathbb{C}^*$, muni de $\times$
5. $\{f_{a,b} : z \mapsto az + b,\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ muni de $\circ$

Exercice 3 :
Déterminer si les ensembles H suivants sont des sous-groupes du groupe G :

1. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres pairs
2. $G = (\mathbb{Z}, +)$, H est l'ensemble des nombres impairs
3. $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = [-1, +\infty[$
4. $G = (\mathbb{R}^*, \times)$, $H = \mathbb{Q}^*$
5. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E),\ f(x_0) = x_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0 \in E$ fixé.
6. $G = (\mathcal{S}(E), \circ)$, $H = \{f \in \mathcal{S}(E),\ f(x_0) = y_0\}$ où E est un ensemble non vide et $x_0, y_0 \in E$ fixés avec $x_0 \neq y_0$.

Exercice 4 (Partie stable) :
On pose,

$$\forall x, y \in [0, 1],\ x \star y = x + y - xy$$

1. Montrer que $\star$ est une LCI sur $[0, 1]$.
2. $\star$ est-elle commutative ? Associative ?

3. Existe-t-il un élément neutre ? Quels sont les éléments symétrisables ?
4. Montrer que $\forall a \in [0,1]$, $E_a = [a,1]$ est une partie stable.

Exercice 5 (**) :
Soit E un ensemble muni d'une LCI $\star$ associative. On suppose $\exists a \in E$ tel que $f : E \to E$ définie par $f(x) = a \star x \star a$ est surjective. On note b un antécédent de a par f.

1. Montrer $e = a \star b$ est un élément neutre à gauche et $e' = b \star a$ est élément neutre à droite pour $\star$. En déduire que $e = e'$.
2. Montrer que a est symétrisable et que f est bijective.

Exercice 6 (Caractérisation de la symétrisabilité par la bijectivité) :
Soit E un ensemble muni d'une LCI $\star$ associative et d'un élément neutre e.
Montrer que $a \in E$ est symétrisable pour $\star$ si, et seulement si, $f : x \mapsto a \star x$ est bijective.

Exercice 7 (Commutativité forcée) :
Soit $(G, \times)$ un groupe notée multiplicativement et e l'élément neutre. On suppose que $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est un groupe abélien.
2. Soit $a \in G$, $a \neq e$. On définit la relation $\sim$ sur G par

$$\forall x, y \in G,\ x \sim y \iff (x = y \text{ ou } x = ay)$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G. Montrer que toutes les classes d'équivalences contiennent deux éléments.

3. On définit une relation $\star$ sur l'ensemble $\mathrm{Cl}(G) = \{\mathrm{Cl}(x),\ x \in G\} \subset \mathcal{P}(G)$ des classes d'équivalences par

$$\forall x, y \in G,\ \mathrm{Cl}(x) \star \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(xy).$$

Montrer que $(\mathrm{Cl}(G), \star)$ est un groupe abélien dans lequel chaque élément est son propre symétrique.

4. On suppose que G est fini. Montrer que le nombre d'éléments de G est une puissance de 2.

Exercice 8 ((*) Transport de loi) :
Soit $(G, \star)$ un groupe et E un ensemble. Soit $\varphi : G \to E$ bijective. On définit la loi $\diamond$ sur E par

$$\forall x, y \in E,\ x \diamond y = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y)\right).$$

Monter que $(E, \diamond)$ est un groupe.

Exercice 9 (Addition des vitesses en théorie de la relativité) :
Soit $c > 0$. On poe $I =]-c, c[$. On pose

$$\forall x, y \in I,\ x \star y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}.$$

Montrer que $(I, \star)$ est une groupe abélien.

Si c est la vitesse de la lumière, cette loi correspond à l'addition des vitesses portées par un même axes en théorie de la relativité.

Exercice 10 (Produit cartésien de groupes) :
Soit $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. Montrer que si on munit $G \times H$ de la LCI

$$(g, h) \diamond (g', h') = (g \star g', h \triangle h')$$

$G \times H$ devient alors un groupe.

Exercice 11 (Produit idempotent) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et e sont élément neutre. Soit $a, b \in G$.
Montrer

$$(ab)^n = e \implies (ba)^n = e$$

Exercice 12 ((**) Translations surjectives) :
Soit G un ensemble non vide muni d'une LCI associative $\star$ telle que

$$\forall a, b \in G,\ \exists x, y \in G,\ a = x \star b = b \star y.$$

Montrer que $(G, \star)$ est une groupe.

Exercice 13 (Sous-groupes emboîtés) :
Soit $(G, \star)$ un groupe. Pour H et K deux sous-groupes de G, on note $H \star K = \{h \star k,\ (h, k) \in H \times K\}$.
Soit H, K, L trois sous-groupes de G tels que $H \subset K$, $H \cap L = K \cap L$ et $H \star L = K \star L$.
Montrer que $H = K$.

Exercice 14 (Sous-groupes des racines de l'unité) :
Montrer que

$$\mathbb{V} = \{z \in \mathbb{C},\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1\}$$

est un groupe multiplicatif.

Exercice 15 (Exemple de groupe) :
On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on définies les applications

$$i(x) = x,\ f(x) = 1 - x,\ g(x) = \frac{1}{x},\ h(x) = \frac{x}{x-1},\ k(x) = \frac{x-1}{x},\ \ell(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Montrer que ces applications sont des bijections sur E et que $G = \{i, h, g, h, k, \ell\}$ est un groupe non abélien pour la composition.

Exercice 16 ((*) Sous-groupe de $\mathbb{R}^*$) :
Monter que

$$G = \{x + y\sqrt{3},\ x, y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 17 (Produit de sous-groupe) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et H et K deux sous-groupes de G. On note

$$HK = \{hk,\ (h, k) \in H \times K\} \qquad \text{et} \qquad KH = \{kh,\ (h, k) \in H \times K\}.$$

Montrer que

$$HK \text{ sous-groupe } G \iff KH \subset HK$$

puis que dans ce cas, $HK = KH$.

Exercice 18 (Caractérisation des groupes abélien [✓]) :
Soit G un groupe noté multiplicativement et e sont élément neutre.

1. Montrer qu'on a équivalence entre :
   (a) G est abélien
   (b) $\forall a, b \in G,\ (ab)^2 = a^2b^2$
   (c) $\forall a, b \in G,\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
2. En déduire que si $\forall x \in G,\ x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercice 19 (Automorphisme intérieur [✓]) :
Soit $(G, \times)$ un groupe. On note :

$$\forall a \in G,\ \tau_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & axa^{-1} \end{array}$$

1. Montrer que τ_a est un morphisme de groupe.
2. Montrer que $\forall a, b \in G,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$.
3. Montrer que $\forall a \in G,\ \tau_a$ est bijective et déterminer sa réciproque.
4. En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a,\ a \in G\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 20 :
Montrer :

1. $\{\frac{a}{b^k},\ a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, où $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$.
2. [Bonus : arithmétique] Si $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq,\ p, q \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 21 :
Déterminer les homomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs ? Surjectifs ?

Exercice 22 :
Montrer qu'il n'existe pas de morphismes de groupes surjectifs de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

Exercice 23 (Groupes des automorphismes) :
Soit G un groupe multiplicatif. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$
2. Déterminer $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$.
3. Pour $a \in G$, on note $\varphi_a : G \to G$ définie par $\varphi_a(g) = aga^{-1}$. Montrer que $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$ et que $a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupes.
4. L'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est-il surjectif ? A quelle condition est-il injectif ?

2 Anneaux

Exercice 24 :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Montrer que si $a \in A$ est inversible à droite et à gauche, alors $a \in A^\times$.

Exercice 25 (Entier de Gauss [✓]) :
On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau. Déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
2. Justifier que $\forall a \in \mathbb{Q}$, $[a - 1/2, a + 1/2] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.
3. Soit $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Montrer que $\exists q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$. A-t-on unicité ?
4. On pose $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = |z|^2$. Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
5. Un élément $a \in \mathbb{Z}[i]$ est dit *irréductible* si : $(\exists u, v \in \mathbb{Z}[i],\ a = uv \implies u \in \mathbb{Z}[i]^\times$ ou $v \in \mathbb{Z}[i]^\times)$.
   Montrer que 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
6. On définit les rationnels de Gauss comme l'ensemble des complexes à coordonnées rationnelles : $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un corps.

Exercice 26 :
On pose

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } \exists a, b \in \mathbb{Z},\ x = a + b\sqrt{2}\}.$$

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, l'écriture précédente est unique.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un anneau.
3. Pour $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $n(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $n(xy) = n(x)n(y)$.
4. (a) Montrer que $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si, et seulement si, $n(x) \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que $1 + \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} - 1$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
   (c) Montrer qu'il n'existe aucun élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $]1, 1 + \sqrt{2}[$.
   (d) Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ strictement supérieurs à 1 inversibles sont exactement les nombres de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6. En déduire qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un élément de la forme $p + \sqrt{2}q$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 27 (Anneau de Boole) :
Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole[1], c'est-à-dire un anneau tel que $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A$, $2x = 0_A$. En déduire que A est un anneau commutatif.
2. Montrer que l'on définit une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur A on posant

$$x \preccurlyeq y \iff xy = x$$

Exercice 28 (Anneau de sous-parties) :
Soit E un ensemble. On définit la différence symétrique sur $\mathcal{P}(E)$ par $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

1. On notera que l'anneau de l'exercice 28 est un exemple non trivial d'anneau de Boole

Exercice 29 (Nilpotent dans un anneau) :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.
Soit $x, y \in A$.

1. Montrer que si x est nilpotent et x et y commutent, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
3. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors $x+y$ est aussi nilpotent.
4. Montrer que si x est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible et préciser $(1_A - x)^{-1}$.

Exercice 30 :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau et soit $a, b \in A$.
Montrer que si $1_A - ab$ est inversible, alors $1_A - ba$ l'est aussi.

Exercice 31 (Caractéristique d'un anneau) :
Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On appelle *caractéristique de* A l'ordre de 1 dans $(A,+)$, s'il existe et on dit que A est de caractéristique 0 sinon.
On suppose que A est de caractéristique $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\forall x \in A,\ nx = 0_A$.
2. Montrer que si A est intègre, alors n est nombre premier.

Exercice 32 :
Soit $(A,+,\times)$ et $(B,\oplus,\otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneau.

1. Montrer que si f est surjective, alors $f(A^\times) = B^\times$.
2. Que penser de la réciproque ?

3 Corps

Exercice 33 :
On pose

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \oplus b = a + b - 1 \qquad \text{et} \qquad a \odot b = ab - a - b + 2.$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ est un corps.

Exercice 34 (Produit cartésien) :
Soit $(A,+,\times)$ et $(B,\oplus,\odot)$ deux anneaux.

1. Montrer qu'en munissant $A \times B$ des lois

$$(a,b) \boxplus (a',b') = (a + a', b \oplus b') \qquad \text{et} \qquad (a,b) \boxdot (a',b') = (aa', b \odot b')$$

$A \times B$ devient un anneau.

2. Si A et B sont des corps, en est-il de même pour $A \times B$?

Exercice 35 :
Soit $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que F est un sous-corps de $\mathbb{R}$.