NOM :
Prénom :

Mardi 21 Novembre 2023

Interrogation 8

Suites 1

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de suites adjacentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u et v sont adjacentes, si l'une est croissante, l'autre décroissante et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Définition d'une suite convergente.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est convergente si $\exists \ell \in \mathbb{C}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

3. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Toute suite bornée admet (au moins) une sous-suite convergente.

4. Théorème de la limite monotone (un seul cas).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante. Alors u converge si, et seulement si, u est minorée. Et dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Et si u n'est pas minorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

1. Borne suite à partir d'une borne d'une limite.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a < \ell$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a < u_n$.

2. Variation d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $f : D \to D$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et la monotonie est déterminée par le signe de $u_1 - u_0$. Si f est décroissante, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de monotonie contraire.

3. Limite potentielle d'une suite récurrente d'ordre 1.
Soit $f : D \to D$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est continue sur D et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

4. Passage à la limite dans les inégalités.
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Exercice 2 :
Soit $p \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + (p+1)u_{n+1} + \frac{2p+1}{4}u_n = 0$. Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

La suite u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels d'équation caractéristique $r^2 + (p+1)r + \frac{2p+1}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = (p+1)^2 - 2p - 1 = p^2 \geq 0$.

Si $p = 0$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation caractéristique a une unique racine double $r_0 = -\frac{p+1}{2}$. Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda + \mu n)(-\frac{p+1}{2})^n$. Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc $\lambda = 0$ et $-\frac{\mu(p+1)}{2} = 1$. Donc $\mu = -\frac{2}{p+1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n\left(\frac{p+1}{2}\right)^{n-1}.$$

Si $p \neq 0$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{-p-1+p}{2} = -1/2$ et $r_2 = \frac{-p-1-p}{2} = -\frac{2p+1}{2}$. Donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(-1/2)^n + \mu\left(-\frac{2p+1}{2}\right)^n$. Or $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc $\lambda + \mu = 0$ et $-\lambda/2 - (2p+1)\mu/2 = 1$. Donc $\lambda = -\mu = 1/p$. Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{p}\frac{(2p+1)^n - 1}{2^n}.$$