DM 4
Équivalents de Stirling

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 28 Novembre 2023

Le but de ce problème est de déterminer l'équivalent de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie I : Un équivalent à une constante près

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{n}n^n}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{1-\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$
3. On introduit la fonction φ définie par
$$\forall t > 0,\ \varphi(t) = 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t).$$
   (a) On pose $\psi(t) = 2t - (t+2)\ln(1+t)$. Par une double dérivation, déterminer le signe de ψ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire la décroissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On appelle C la limite de la suite (u_n).
5. Justifier que $C \geq 0$.
6. Supposons que $C = 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(u_n).$$
   (a) Que peut-on dire sur la convergence de (v_n) ?
   (b) Montrer que $\forall n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n = 1 - \left(\frac{1}{2}+n\right)\ln(1+1/n)$.
   (c) Montrer que $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
   (d) En déduire un encadrement de $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \geq 2$.
   (e) En déduire
$$\forall n \geq 2,\ -\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} \leq v_{n+1} - v_2 \leq \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

(f) En admettant (encore pour quelques semaines) que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et en notant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(2) \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(3) \in \mathbb{R},$$

aboutir à une contradiction et conclure que $C > 0$.

7. En déduire finalement

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Détermination de la constante C

On définit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$$

En faisant alors un changement de variable et en utilisant la positivité de l'intégrale et la croissance de l'intégrale, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0 \qquad \text{et} \qquad (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

Il est facile aussi de calculer les premiers termes, et une double intégration par partie nous permet d'avoir :

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \end{cases}$$

8. Calculer I_2, I_3, I_4, I_5.
9. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante et donner sa valeur.
10. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

11. En utilisant la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
12. En déduire un équivalent de J_n faisant intervenir I_n, puis en déduire

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

13. À l'aide de la partie I et de la suite $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donner la valeur de la constante C.
14. Applications : Donner un équivalent simple et la limite des suites dont le terme général est

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$$