



Chapitre 9 - TD : Espaces vectoriels

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

28 novembre 2023

1 Espaces Vectoriels

Exercice 1 :

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois suivantes :

$$\forall (x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \star (z, t) = (x + z + 1, y + t + 1)$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda @ (x, y) = (\lambda x - (1 - \lambda), \lambda y - (1 - \lambda))$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, \star, @)$ est un $\mathbb{R}$ -ev.

2 Sous-ev

Exercice 2 :

Les parties suivantes sont-elles des sev de $\mathbb{R}^2$?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0\}$$

Exercice 3 :

Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$A = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable}, f'(a) = f'(b)\}$$

$$C = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ bornée}\}$$

$$E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ monotone}\}$$

$$G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$$

$$B = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \int_a^b f = 0\}$$

$$D = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ arithmétique}\}$$

$$F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$$

Exercice 4 :

On considère les vecteurs

$$u = (1, 1, 1), v = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$$

Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \{(2a, a + b, 2b), a, b \in \mathbb{R}\}$ et donner des Vect(u, v) en compréhension (donc donner des équations que doivent vérifier les coordonnées des vecteurs de Vect(u, v)).

Exercice 5 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$x = (1, -1, 1) \quad \text{et} \quad y = (0, 1, a), \quad a \in \mathbb{R}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2) \in \text{Vect}(x, y)$. Comparer alors $\text{Vect}(x, y)$, $\text{Vect}(x, u)$ et $\text{Vect}(y, u)$, puis donner des équations de ces espaces.

3 Opérations sur les sev

Exercice 6 :

Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(a - b, a + b, a - 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 7 ([✓]) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F et G deux sev de E . Montrer

$$F \cap G = F + G \iff F = G$$

Exercice 8 (CNS de structure d'ev pour une réunion [✓]) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F, G deux sev de E .

Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 9 :

Soit F, G, H trois sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

Montrer

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

Exercice 10 :

Soit

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{x \mapsto ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 :

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E, f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 12 :

Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 13 :

Soit F, G, F', G' des sev d'une $\mathbb{K}$ -ev E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.

Montrer

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$$

Exercice 14 :

On pose $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et on considère les sous-espaces

$$F_1 = \{f \in E, f \text{ constante}\} \quad F_2 = \{f \in E, \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$$

$$F_3 = \{f \in E, \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\}$$

Montrer

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$$

Exercice 15 :

Soit F, F', G, G' des sev de E un $\mathbb{K}$ -ev tels que

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \quad \text{et} \quad F' \subset G$$

Montrer

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ des sev de E tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E_i \subset F_i$ et

$$\bigoplus_{i=1}^n E_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, E_i = F_i$.

4 Familles libres, Familles génératrices

Exercice 17 :

Étudier l'indépendance linéaire des familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes. Pour les familles liées, donner une combinaison linéaire non triviale nulle. Donner des équations des espaces engendrés par ces familles de vecteurs.

1. $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (1, 2, 2)$
2. $x_1 = (1, 2, 1), x_2 = (2, 1, -1), x_3 = (1, -1, -2)$
3. $x_1 = (1, -1, 1), x_2 = (2, -1, 3), x_3 = (-1, 1, -1).$
4. $x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (1, -1, 0), x_3 = (1, 0, 2), x_4 = (2, 1, 0).$
5. $x_1 = (1, 1, -1), x_2 = (2, 0, 1), x_3 = (0, 1, 1).$

Exercice 18 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $x_1 = (1, a, b), x_2 = (b, 1, a)$ et $x_3 = (a, b, 1).$

Étudier l'indépendance linéaire de x_1, x_2 et x_3 en fonction des paramètres a et b .

Exercice 19 ([✓]) :

Montrer que la famille suivantes est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f_1 : x \mapsto \cos(x), \quad f_2 : x \mapsto x \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto \sin(x), \quad f_4 : x \mapsto x \sin(x)$$

Exercice 20 ([✓]) :

$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 21 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $x, y, z \in E$ trois vecteurs linéairement indépendants de E . On pose

$$u = y + z, \quad v = z + x, \quad w = x + y$$

Montrer que (u, v, w) est encore une famille libre de E .

Exercice 22 ([✓]) :

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On pose

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

et

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad y_i = x_i + u$$

A quelle condition sur les α_i , la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est-elle libre ?

Exercice 23 :

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E un $\mathbb{K}$ -ev.

Montrer que $\forall a \in E \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 24 ()**

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante de tous les nombres premiers (donc $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ etc)

Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriels et que $(\ln(p_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$ -ev.

Exercice 25 :

Trouver des familles génératrices des sev suivants

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = t - z = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y = x - z = x - t = 0\}$$

$$D = \{(x, y, z, t, u, v) \in \mathbb{R}^6, z - 2x - y + 3t + u - v = 0\}$$

Exercice 26 ([✓]) :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Soit G un supplémentaire de F dans E . Pour tout $a \in G$, on pose

$$F_a = \text{Vect}(e_1 + a, \dots, e_p + a)$$

1. Montrer que $\forall a \in G, F_a \oplus G = E$

2. Soit $a, b \in G$. Montrer que

$$a \neq b \implies F_a \neq F_b$$