DM 4

Équivalents de Stirling

Correction

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 28 Novembre 2023

Partie I : Un équivalent à une constante près

On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}.$$

1. On sait que $\forall n \geq 1$, $e^n > 0$, $n! \geq 1$, $\sqrt{n} \geq 1$ par croissance de la fonction racine, $n^n \geq 1$. Donc $\forall n \geq 1$, $u_n > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcul :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!e^{n+1}}{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}}\frac{\sqrt{n}n^n}{n!e^n}\\ &= e\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= e^{1-\frac{1}{2}\ln(1+1/n)+n(\ln(n)-\ln(n+1))}\\ &= e^{1-\frac{1}{2}\ln(1+1/n)-n\ln(1+1/n)}\\ &= e^{1-\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln(1+1/n)}\end{aligned}$$

3. On pose

$$\begin{aligned}\forall t > 0,\ \varphi(t) &= 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t)\\ &= \frac{2t-(t+2)\ln(1+t)}{2t}\\ &= \frac{\psi(t)}{2t}\end{aligned}$$

On remarque aussi immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\varphi(1/n)}.$$

(a) ψ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \psi'(t) = 2-\ln(1+t)-\frac{t+2}{t+1}$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \psi''(t) = -\frac{1}{1+t}-\frac{t+1-t-2}{(t+1)^2} = -\frac{t}{(t+1)^2} \leq 0.$$

On en déduit le tableau de signes :

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\psi''(t)$	$-$
ψ'	$0 \searrow -\infty$
$\psi'(t)$	$-$
ψ	$0 \searrow -\infty$
$\psi(t)$	$-$

(b) Comme $\forall t > 0,\ \varphi(t) = \frac{\psi(t)}{2t}$, on en déduit que φ et ψ sont du même signe. Donc $\forall t > 0,\ \varphi(t) < 0$.

(c) On en déduit également que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{\varphi(1/n)} < 1$$

par croissance de l'exponentielle. Et donc la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0 (cf question 1). Donc, par théorème de la limite monotone, elle est convergente. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe. On pose $C = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
5. On sait que $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$. Donc, par passage à la limite dans les inégalités, $C = \lim_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
6. On suppose $C = 0$. On pose

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \ln(u_n).$$

(a) Comme la suite (u_n) converge vers 0 et comme $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$. Par caractérisation séquentielle des limites (ou par composition dans les limites), on obtient $v_n = \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Donc la suite (v_n) est divergente vers $-\infty$.

(b) D'après la question 2, on a $\forall n \geq 2,\ v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) = \varphi(1/n) = 1 - \left(\frac{1}{2} + n\right)\ln(1+1/n)$.

(c) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x) - x + x^2/2$ et $g(x) = f(x) - x^3/3$. Alors f et g sont dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme sommes (et composées) d'applications dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \geq 0,\ f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 - x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

et

$$\forall x \geq 0,\ g'(x) = f'(x) - x^2 = \frac{x^2 - x^2 - x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f(0) = g(0) = 0$. On en déduit donc

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{x} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

(d) En particulier, $\forall n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln(1+1/n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}.$$

On en déduit donc

$$\forall n \geq 2,\ 1 - \frac{1}{2n} \leq n\ln(1+1/n) \leq 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Et aussi

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{2}\ln(1+1/n) \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3}.$$

En sommant les deux relations précédentes, on a

$$\forall n \geq 2,\ 1 - \frac{1}{4n^2} \leq \left(\frac{1}{2} + n\right)\ln(1+1/n) \leq 1 + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{6n^3}.$$

D'où

$$\forall n \geq 2,\ -\frac{1}{12n^2} - \frac{1}{6n^3} \leq 1 - \left(\frac{1}{2} + n\right)\ln(1+1/n) = v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{4n^2}.$$

(e) En sommant les inégalités précédentes, on trouve, par télescopage,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2,\ -\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} &\leq \sum_{k=2}^{n}(v_{k+1} - v_k)\\ &= v_{n+1} - v_2\\ &\leq \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

(f) Or

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 \in \mathbb{R}$$

et

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(3) - 1 \in \mathbb{R}.$$

Donc $(v_{n+1} - v_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée (encadrée par deux suites convergentes, donc deux suites bornées). Or par hypothèse, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc par composition dans les limites, $v_n = \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Et donc (v_n) n'est pas minorée. D'où ☠.

On en conclut que $C \neq 0$. Or $C \geq 0$. Donc $C > 0$.

7. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} C \neq 0$, on en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C$. Et par multiplication, on a immédiatement,

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie II

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n \end{cases}$$

que l'on admet être décroissante et strictement positive.

8. On a alors

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_3 = \frac{1+1}{1+2}I_1 = \frac{2}{3}$$

et

$$I_4 = \frac{2+1}{2+2}I_2 = \frac{3\pi}{16}$$

et

$$I_5 = \frac{3+1}{3+2}I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$J_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} = (n+1)I_nI_{n+1} = J_n$$

Donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à $J_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$.

10. On pourrait montrer les relations par récurrences, mais on va faire autrement. On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}I_{2n}$$

Et par une récurrence facile, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} I_0$$

D'où l'on déduit alors, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} I_0 \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{2k}}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k}}{2^n n!} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Et de même, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}I_{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}I_{2n+1}$$

Donc, par récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} I_1 \\ &= \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} \\ &= \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k+1)}{2k}} \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

11. On sait que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n+1}$. Mais comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq 1$. Mais en utilisant la relation de récurrence vérifiée par (I_n), on en déduit donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq 1$. Or $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc par théorème des gendarmes, $\frac{I_n}{I_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.

12. On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$. Donc $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ puisque $\pi/2 \neq 0$ et $J_n = (n+1)I_nI_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_n^2$.

   On en déduit donc, par transitivité de la relation d'équivalence, $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Et donc $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ puisque l'on peut diviser dans les relations d'équivalences. Et comme on peut élever aussi à une puissance réelle avec des suites à termes strictement positifs (et c'est le cas), on obtient donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13. La suite (I_{2n}) est une sous-suite de la suite (I_n) et on a un équivalent de la suite (I_n). On en déduit donc un équivalent de la suite (I_{2n}) :

$$I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ d'après la question 10. Et à la fin de la partie I dans la question 7, on a montré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
I_{2n} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}\left(C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{C\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}C^2nn^{2n}e^{2n}} \\
&= \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

Par transitivité de la relation d'équivalence, on a donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$$

Ce qui nous amène facilement à

$$C \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{2\pi}$$

Mais comme les deux côtés sont des constantes, en passant à la limite et en utilisant l'unicité de la limite (par exemple), on a

$$C = \sqrt{2\pi}$$

Et on a fini (à 3 question près) la démo de l'équivalent de Stirling ! !

14. Application :

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{n!}{n^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}(n/e)^n\sqrt{2\pi n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

par croissance comparée. Et

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{(n!)}{n^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}(n/e)^{2n}(2\pi n) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (2\pi n)(n/e^2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty
\end{aligned}$$