NOM :
Prénom :

Mardi 06 Décembre 2023

Lycée Loges

Interrogation 10

Groupes - Anneaux - Corps

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition du noyau d'un morphisme de groupe.

Soit G, H deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupe. On appelle noyau de f l'ensemble $\ker(f) = \{g \in G,\ f(g) = e_H\}$, où e_H est l'élément neutre de H.

2. Caractérisation des sous-groupes.

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e_G et $H \subset G$. Alors H est un sous-groupe de G, ssi $e_G \in H$ et $\forall h, h' \in H$, $h^{-1}h' \in H$.

3. Définition d'un anneau.

Soit A un anneau et $+, *$ deux LCI sur A. Alors $(A, +, *)$ est un anneau si $(A, +)$ est un groupe abélien, $*$ a un élément neutre et $*$ distributive sur $+$ (*i.e.* $\forall a, b, c \in A$, $a * (b + c) = a * b + a * c$).

4. Binôme de Newton.

Soit $(A, +, *)$ un anneau, $a, b \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $ab = ba$, alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

5. Définition de la commutativité et associativité d'une LCI.

Soit E un ensemble et $*$ une LCI sur E. On dit que $*$ est commutative si $\forall x, y \in E,\ x * y = y * x$. On dit que $*$ est associative si $\forall x, y, z \in E,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

6. Inversibles dans un groupe.

Soit $(G, *)$ un groupe multiplicatif. Alors : $\forall g \in G$, $(g^{-1})^{-1} = g$; $\forall g, h \in G$, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$; $\forall g \in G$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(g^{-1})^n = (g^n)^{-1}$; et $\forall g \in G$, $\exists! h \in G$ tel que $gh = hg = e$ (avec e l'élément neutre de G).

7. Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors H est dense dans $\mathbb{R}$ ou alors $\exists a \in \mathbb{R}_+$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.

8. Définition d'un morphisme de groupe.

Soit $(G, *)$ et $(H, \star)$ deux groupes et $f : G \to H$. f est un morphisme de groupe si $\forall g, g' \in G$, $f(g * g') = f(g) \star f(g')$.

Exercice 2 :
Montrer que $\mathbb{R}$ est un groupe pour la loi $*$ définie par : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y + 1$.

D'abord, remarquons que $*$ est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 1 = y + x + 1 = y * x$ par commutativité de $+$ dans $\mathbb{R}$. Puis : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-1) = x - 1 + 1 = x$. Et par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-1) = x = (-1) * x$. Donc -1 est élément neutre pour $*$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-x - 2) = x - x - 2 + 1 = -1$. Et par commutativité, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x * (-x - 2) = -1 = (-x - 2) * x$. Donc tout élément est inversible.

Et enfin, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $x*(y*z) = x+(y*z)+1 = x+(y+z+1)+1 = (x+y+1)+z+1 = (x*y)+z+1 = (x*y)*z$ en utilisant la commutativité et l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$. Donc $*$ est associative.

Finalement, par définition, $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe, d'élément neutre -1.