DS 4
Suites - Groupes - Anneaux

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Mercredi 6 Décembre 2023

Le devoir dure 4h.

La qualité de la rédaction et de la présentation seront prises en compte dans la notation. On prendra bien garde à la justesse et la précision des justifications.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'identifiera clairement sur la copie et explicitera les décisions qu'il sera amené à prendre.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Le sujet comporte 3 pages.

Problème 1 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1) :
Dans tous ce problème, on s'intéresse à l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2.$$

Partie 1 : Étude dans le cas $u_0 \in \mathbb{R}$

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto x + x^2$ sur $\mathbb{R}$. Dessiner le graphe de f (un croquis à main levé) et placer les 3 premiers termes de la suite dans le cas $u_0 = 1/2$.
2. Montrer que si $u_0 \in [-1/4, 0]$ alors (u_n) converge 0. Montrer que si $u_0 > 0$, alors (u_n) diverge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Déterminer la nature de (u_n) lorsque $u_0 < -1/4$.

Partie 2 : Vitesse de convergence lorsque $u_0 \in]-1, 0[$

On suppose dans cette partie que $u_0 \in]-1, 0[$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n+1} < u_n < 0$. Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = nu_n$ est décroissante, puis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [-1, 0[$.
6. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ converge vers $\ell(\ell + 1)$.
7. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\exists k > 0$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a_{n+1} - a_n \geq k/n$. Montrer alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $a_{2n} - a_n \geq k/2$, puis que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

8. Montrer, par un raisonnement par l'absurde à l'aide de la question précédente, que $\ell = -1$.
   Remarque :
   On vient de montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1/n$, donc que la convergence de la suite (u_n) est assez lente.

Partie 3 : Étude dans le cas où $u_0 \in \mathbb{C}$ avec $|u_0| \geq 2$

On suppose dans cette partie $u_0 \in \mathbb{C}$.

9. Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| \geq 2$, alors $|1+a| \geq 1$ et étudier le cas d'égalité.
10. En déduire que si $|u_0| \geq 2$, alors $\forall n \geq 2$, $|u_n| > 2$.
11. En posant $k = |u_1| - 2$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1}| \geq (1+k)|u_n|$. En déduire que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Partie 4 : Étude de l'ensemble des valeurs $u_0 \in \mathbb{C}$ pour lesquelles (u_n) converge.

On note, dans cette partie, R le rectangle constitué des points $a + ib$ du plan complexe, avec $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $-1 \leq a \leq 0$ et $|b| \leq \sqrt{3}/2$.

12. En notant a_n la partie réelle de u_n et b_n sa partie imaginaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Montrer que R est stable par la fonction $f : z \mapsto z + z^2$.
    On supposera désormais que $u_0 \in R$.
14. Montrer que $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\lambda \in [0, \sqrt{3}/2]$.
15. Montrer que $\lambda = 0$.
16. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n + b_n^2 \leq 0$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|1 + u_n| \leq 1$ et en déduire finalement que $(|u_n|)$ converge.
17. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer sa limite.

Problème 2 (Sous-groupes distingués) :
Soit G un groupe multiplicatif. On note e l'élément neutre de G.
Si $X \subset G$ est une partie non vide de G et si $a, b \in G$, alors on note

$$aX = \{ax,\ x \in X\}, \qquad Xb = \{xb,\ x \in X\}, \qquad aXb = (aX)b = a(Xb) = \{axb,\ x \in X\}.$$

Les inclusions suivantes sont peuvent être utilisées telles qu'elle et n'ont pas besoin d'être démontrées :

$$X \subset Y \Rightarrow \begin{cases} aX \subset aY \\ Xb \subset Yb \\ aXb \subset aYb \end{cases} \qquad \begin{cases} a(bX) = (ab)X \\ (Xa)b = X(ab) \\ a(bXc)d = (ab)X(cd) \end{cases} \qquad eX = Xe = X.$$

Partie I : Définition des sous-groupes distingués

1. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall a \in G$, $aH \subset Ha$
   (ii) $\forall a \in G$, $Ha \subset aH$

(iii) $\forall a \in G$, $aH = Ha$

Si un sous-groupe H vérifie ces propriétés, on dit que H *est un sous-groupe distingué de* G.

2. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) H est distingué dans G
   (ii) $\forall a \in G$, $aHa^{-1} = H$
   (iii) $\forall a \in G$, $aHa^{-1} \subset H$
3. Soit $a \in G$. On pose $\varphi_a : G \to G$ définie par $\forall x \in G$, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$.
   (a) Montrer que φ_a est un automorphisme du groupe G. φ_a s'appelle un *automorphisme intérieur* de G.
   (b) Exprimer la question 2, en terme d'automorphismes intérieurs.

Partie II : Exemples de sous-groupes distingués

4. Vérifier que $\{e\}$ et G sont des sous-groupes distingués de G.
5. Que peut-on dire des sous-groupes distingués de G si G est abélien ?
6. Soit G' un groupe. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.
   (a) Soit H' un sous-groupe distingué de G'. Montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.
   (b) On suppose f surjective. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe distingué de G'.
   (c) Que dire du noyau de f ?

Partie IV : Produit de deux sous-groupes

Soit H et K deux sous-groupes de G.

7. Montrer que $HK \subset KH \iff KH \subset HK \iff HK = KH$.
8. Montrer que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.
9. On suppose que l'un des deux sous-groupes H ou K est distingué. Montrer que $HK = KH$. Que peut-on en conclure ?