NOM :
Prénom :

Mardi 12 Décembre 2023

Interrogation 11

Espaces Vectoriels

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de l'espace engendré par une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $x_1, \dots, x_n \in E$. On note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ l'espace engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$ et par définition, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$.

2. Caractérisation des sev.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. F est un sev de E ssi $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$ (*i.e.* F stable par combinaisons linéaires) et $0 \in F$.

3. Définition d'une somme directe.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E. On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$. Et dans ce cas, on note $F \oplus G$ la somme $F + G$.

4. Caractérisation des sommes directes.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E. Alors F et F sont en somme directe ssi $\forall x \in F + G,\ \exists!(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$.

5. Définition de sevs supplémentaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E, si $F \oplus G = E$, *i.e.* si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.

6. Espaces engendrés et inclusion.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A, B \subset E$. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

7. Espaces engendrés par une réunion.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A, B \subset E$. Alors $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

8. Définition d'une famille libre.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs de E. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est dite libre si $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice 2 :
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)\}$. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-ev. Soit $G = \text{Vect}(x \mapsto 1)$. Montrer que F et G sont en somme directe.

Par définition de F, $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Clairement, $x \mapsto 0 \in F$ car $0 = 0 + 0$.
Soit $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)(x + y) &= \lambda f(x + y) + \mu g(x + y) && \text{def opé entre fcts} \\
&= \lambda(f(x) + f(y)) + \mu(g(x) + g(y)) && \text{car } f, g \in F \\
&= (\lambda f(x) + \mu g(x)) + (\lambda f(y) + \mu g(y)) && \text{asso, commu, distri dans } E \\
&= (\lambda f + \mu g)(x) + (\lambda f + \mu g)(y) && \text{def opé entre fcts}
\end{aligned}$$

Donc, par définition de F, $\lambda f + \mu g \in F$.

Donc, par caractérisation des sev, F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $h \in F \cap G$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = x \mapsto \lambda$ (par définition de G et des opérations entre fcts). Or $h \in F$, donc $h(2) = h(1) + h(1)$ et donc $\lambda = 2\lambda$. Donc $\lambda = 0$. Donc $h = 0$. Donc $F \cap G \subset \{0\}$. Or F et G sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc $0 \in F \cap G$. Et donc $F \cap G = \{0\}$.

Donc, par définition, F et G sont en somme directe.