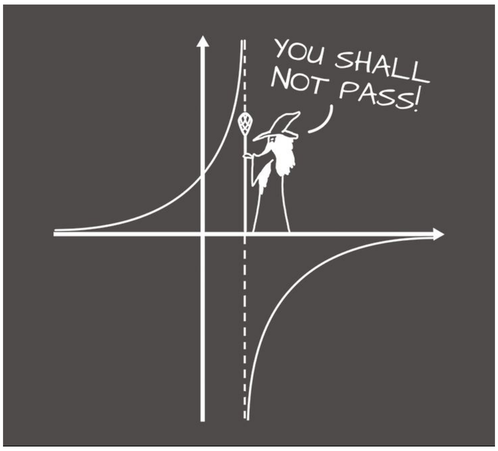
Chapitre 12
Limites et Continuité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

15 décembre 2023



Dans ce chapitre, on reprend les notions de limites, continuité etc. On va bien sûr les revoir d'un point de vue prépa.

Ce chapitre est la version continue de ce qui a été vue sur les suites. On rappelle que les suites sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Ce sont des fonctions discrètes. Ici, on prendra un point de vue "continue", c'est à dire que l'ensemble de départ ne sera plus discret. On étend alors essentiellement toutes les notions du chapitre sur les suites (et on en introduit d'autres qui sont spécifiques au cas continue, les choses étant légèrement différentes, on se confronte à de nouveaux problèmes).

Historiquement, la notion de continuité était très intuitive et vraiment peu rigoureuse. Jusqu'au XVIIIème, la notion de fonction continue consistait en "on peut tracer le graphe de la fonction sans lever le crayon" (à reformuler avec le style de l'époque, bien sûr). C'est peu rigoureux comme définition. Néanmoins, c'est intuitivement correct. Il faut donc garder cet aspect à l'esprit. Ce sera notre fil conducteur.

Ce qu'on va faire dans ce cours, c'est reprendre cette notion avec un formalisme moderne et expliciter cette notion de "sans lever le crayon" avec toute la rigueur typiquement mathématique qu'on aime tant.

Les prémices de la définition moderne de la continuité a été introduite par Bolzano (1781-1848) en 1816 :

> *Si x est une valeur quelconque, la différence $f(x+w)-f(x)$ peut être rendue plus petite que toute valeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra.*

Mais on est encore assez loin de la définition d'aujourd'hui. Cette définition sera reformulé pour s'approcher d'avantage de notre définition actuelle par Cauchy, mais correspondra davantage à l'uniforme continuité qu'à la continuité (voir le tout dernier paragraphe de ce chapitre). C'est Weierstrass (1815-1897) qui donnera la formulation actuelle (mais sans le formalisme moderne) :

> *S'il est possible de définir une borne ∂ telle que pour toute valeur h, plus petite en valeur absolue que ∂, $f(x+h)-f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, on dira qu'on fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction.*

Dans tous ce chapitre, on ne considéra que des fonctions d'une variable réelle. Elles seront à valeurs réelles dans un premier temps, puis nous étendrons au cas des fonctions à valeurs complexes dans un second temps.

> Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little ; but nobody could discover what the infinitely little might be.
>
> *Bertrand Russel*

> A topologist is one who doesn't know the difference between a doughnut and a coffee cup.
>
> *John Kelley*

Table des matières

1 Limites

1.1 Notion de voisinage

Dans tous ce chapitre, les intervalles considérés seront des intervalles non vide et non réduit à un point.

Définition 1.1 (Droite réelle achevée) :
On note $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la *droite réelle achevée*.

Définition 1.2 (Fermé d'un intervalle dans $\overline{\mathbb{R}}$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point.
On appellera *fermé de I dans* $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\overline{I}$, l'intervalle :

- Si $\inf I, \sup I \in \mathbb{R}$, $\overline{I} := [\inf I, \sup I]$
- Si $\inf I = -\infty, \sup I \in \mathbb{R}$, $\overline{I} := [-\infty, \sup I]$
- Si $\inf I \in \mathbb{R}, \sup I = +\infty$, $\overline{I} := [\inf I, +\infty]$
- Si $I = \mathbb{R}$, $\overline{I} := \overline{\mathbb{R}}$

Le fermé d'un intervalle est l'intervalle fermé de même bornes que I (donc contenant les bornes) dans la droite réelle achevée.

Exemple 1.1 :
Si $I =]0,1]$, $\overline{I} = [0,1]$. Si $J =]1/2,3[$, alors $\overline{J} = [1/2,3]$. Et si $K = [5,+\infty[$, alors $\overline{K} = [5,+\infty]$.

A strictement parlé, la notion de fermé d'un intervalle n'est pas au programme non plus. C'est une notion topologique. Mais cette notion nous sera particulièrement utile dans la suite. L'utilisation va nous permettre d'alléger grandement les énoncés des propositions. Ça va nous éviter de devoir faire plusieurs cas selon si l'intervalle que l'on considère est majoré ou non, minoré ou non, si l'on fait une limite en l'infini ou non .... On pourra tout manipuler d'un coup. Et c'est là le but.

Définition 1.3 (Voisinage d'un point) :
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{V}$ est *un voisinage de a dans* $\mathbb{R}$, si :

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\exists \eta > 0$, $[a-\eta, a+\eta]$ est un voisinage de a.
- Si $a = +\infty$, alors $\exists A > 0$, $[A, +\infty[$ est un voisinage de a.
- Si $a = -\infty$, alors $\exists B < 0$, $]-\infty, B]$ est un voisinage de a.

Un voisinage épointé est un voisinage de a sans le point a.

Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $a \in \overline{I}$, alors $\mathcal{V} \subset I$ est un *voisinage de a dans I* si il existe un voisinage de $\mathcal{V}(a)$ de a (comme au dessus) tel que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(a) \cap I$.

Si $\mathcal{P}(x)$ est une propriété dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$, on dira que $\mathcal{P}(x)$ *est vraie au voisinage de a* s'il existe un voisinage $\mathcal{V}(a)$ de a tel que $\forall x \in \mathcal{V}(a)$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Par exemple, l'intervalle $[a-\eta, a+\eta]$ est un voisinage de a dans $\mathbb{R}$. Si I est intervalle, un voisinage de a dans I est donc $I \cap [a-\eta, a+\eta]$, ou $I \cap [A, +\infty[$ ou $I \cap]-\infty, B]$, selon les cas.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il y a une notion d'existence dans la notion de voisinage. La propriété est vraie au voisinage de a si elle est vraie quand on se place "assez proche" de a. Le "assez proche" étant à déterminé selon la proposition. C'est un peu imprécis. A chaque fois que quelque chose est vraie "au voisinage", c'est qu'il existe un $\eta > 0$ tel que c'est vrai sur $[a-\eta, a+\eta]$.

Il faut comprendre la formule "au voisinage" par "dans un *bon* voisinage" qui est donc à déterminé, ou encore par "lorsqu'on est *assez* proche" qui nécessite, là aussi, une précision.

Remarque :
Pour un voisinage de a dans un intervalle I, on prendra garde à ne pas oublier l'intersection. Ce sera particulièrement importants pour les restrictions d'une applications. On peut très bien imaginer qu'une fonction soit définie sur l'intervalle $[-1,1]$ et regarder une propriété au voisinage de $1/2$. Peut être que cette propriété sera vraie sur $[-1/2,1]$. Auquel cas, il faudra prendre garde à la valeur de η. Si la démonstration nous amène à avoir $\eta = 1$, il est évident qu'on ne peut pas se contenter de dire "$\forall x \in [-1/2,3/2]$, [...]" puisque la fonction n'est pas défini sur $]1/2,3/2]$. On aurait donc une absurdité. Il faudra donc impérativement se placer sur $[-1/2,3/2] \cap [-1,1] = [-1/2,1]$.

Le problème vient de la définition du voisinage que nous avons donné. Pour nous, un voisinage d'un nombre est toujours centré en ce nombre. Mais s'il est trop proche d'une borne de l'intervalle et si η est un peu trop gros, on pourrait "déborder" de l'intervalle de définition de la fonction.

Une autre façon de régler le problème serait de raboter η de le réduire pour trouver un voisinage de a qui soit inclus dans l'intervalle de définition de la fonction (et qui sera toujours centré en a).

Quoi qu'il en soit, il faudra toujours être bien attentifs aux intervalle et prendre des gants avec la manipulation des intervalles.

Attention ! Dans le cas de limites, on ne veux pas atteindre le point de la limite. Donc il faudra, dans ce cadre précis, comprendre les voisinages d'un point sans le point en question. Il faudra donc épointer les voisinages.

Le principe d'une limite est de tendre, au sens philosophique, vers un point (ou pas). Un peu comme la notion de désir. On regarde ce vers quoi la fonction se rapproche. Mais elle ne l'atteint jamais.

Il faudra pendre garde à ne pas confondre la limite d'une fonction en un point et la valeur de la fonction en ce point. La limite va correspondre a son comportement lorsque qu'on se rapproche du point. Mais se rapprocher sous-entends ne pas atteindre. On se contente de le frôler et on regarde ce qui se passe sur la fonction. Si elle existe en ce point, il n'y a aucune raison que sa valeur en ce point corresponde à son comportement en se rapprochant du point. Ne pas confondre désir et réalité. On peut essayer d'adopter un comportement, d'essayer de se plier à des règles de vie, même si ces règles de vie ne correspondent pas à la façon dont on agit effectivement ("Faites ce que je dis, mais ne faites pas ce que je fais", voir Sénèque).

1.2 Limite finie

1.2.1 Définition

Définition 1.4 (Limite finie en un point [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur I. Soit $a \in \overline{I}$.

On dira que f *a une limite finie* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* a, ou quand x tend vers a, et on notera $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ si :

- Si $a \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{t.q. } \forall x \in I \setminus \{a\},\ |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si $a = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \geq 0,\ \text{t.q. } \forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

- Si $a = -\infty$

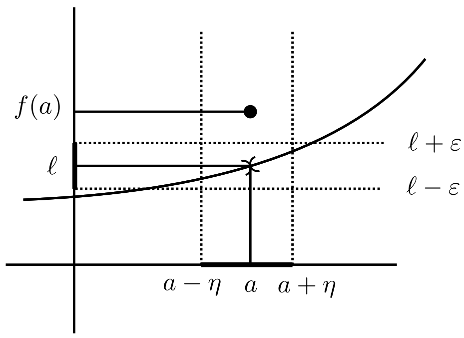
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \leq 0,\ \text{t.q. } \forall x \in I,\ x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, veut dire que, pour tout voisinage de ℓ aussi petit soit-il que l'on considère, $f(x)$ sera dans ce voisinage si x est dans un voisinage de a suffisamment petit.

Attention ! Le a peut ne pas être un élément de I. a peut très bien être une borne de I qui n'est pas dans I. Par exemple, si $I = [0,1[$, on pourrait prendre $a = 1$ ici.

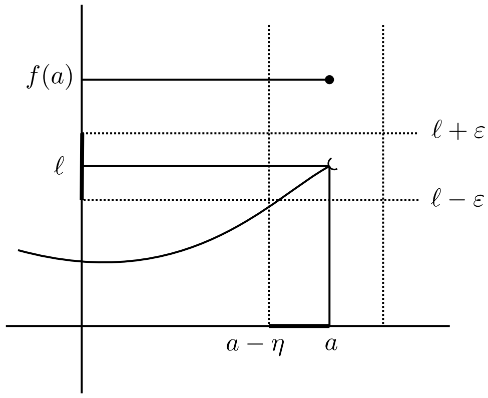
Avec des dessins, on est donc dans l'une des trois situations possibles :

- Soit $a \in I$ mais n'est pas une extrémité et on a donc :



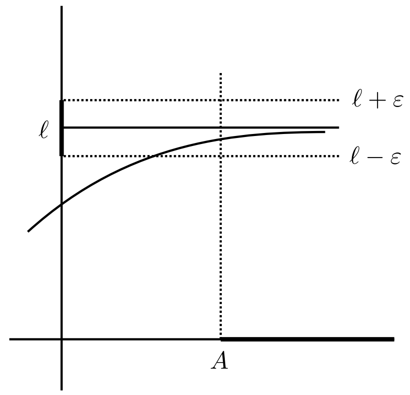
On peut approcher a des deux côtés, tourner autour de a.

- Soit $a \in I$ et est l'une des extrémité de I, *i.e.* une borne de I (dans le cas du dessin, c'est la borne sup) :



On ne peut alors approcher a que par un seul côté.

- Soit $a=+\infty$ (le cas $-\infty$ est identique par symétrie) :



Remarque :
Il y a différentes façons d'écrire la définition d'une limite finie en un point fini. Elles sont toutes équivalentes. On aurait pu écrire $\forall x \in I,\ 0<|x-a|\leq\eta \implies |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$; on encore $\forall x \in ([a-\eta,a[\cup]a,a+\eta]) \cap I,\ |f(x)-\ell|\leq\varepsilon$; ou encore $\forall x \in (I\cap[a-\eta,a+\eta])\setminus\{a\}$, $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$.

Dans la suite, on essaiera de varier les formulations dans la mesure où c'est possible (certains cadre rendent certaines formulations maladroites voir acrobatique).

!!! ATTENTION !!!

Il faut prendre garde aux notations. ON NE PEUT PAS CALCULER AVEC DES LIMITES ! On ne peut écrire quelque chose de la forme $\lim_{x\to a} f(x)$ qu'une fois l'étude de la convergence faite. Cette écriture n'a de sens que si l'on sait que cette limite existe. Il faudra d'abord faire des études pour justifier l'existence de cette limite et ensuite pouvoir écrire ça.

Il faut lire la notation $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ par "la limite de $f(x)$ en a ***est*** ℓ" et la notation $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ par "$f(x)$ ***tend*** (ou converge) vers ℓ en a". La première présuppose donc d'abord la connaissance de l'existence de la limite (et correspond à la valeur de cette limite). Alors que la seconde non. Dans la seconde, on étudie la convergence et on donne en prime la valeur de la limite si ça converge effectivement. La première forme est une forme passive. On sait déjà que tous se passe bien et on peut alors parler de la valeur de ce qu'on obtient. La seconde forme est une forme active. On FAIT tendre x vers a et on regarde ce qu'il se passe. En fonction de ce qu'on obtient, on a donc à la fois la justification de la convergence, l'existence de la limite et la valeur de celle-ci.

On notera qu'il est possible parfois de justifier de la convergence et donc de l'existence de limites sans pour autant avoir la valeur de celle-ci. C'est le cas du théorème de la limite monotone, par exemple.

Remarque :
Une limite est un comportement asymptotique. Écrire $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ veut dire que, lorsque x tend vers a, alors f prend *essentiellement* la valeur ℓ. Mais f n'est pas égale à ℓ et x n'est jamais égale à a. On se rapproche indéfiniment, mais on atteint jamais. Les limites décrivent des tendances, des comportements généraux. Mais comme se sont des comportements, on ne peut pas les manipuler comme si c'était des réels bêtes et méchants. Il faut prendre des précautions.

On pourra rajouter (et ce sera fait à des fins pédagogiques) la précision $x \neq a$ qui est contenu dans la définition des notations.

!!! ATTENTION !!!

Si f est définie en a, ne pas confondre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $f(a)$ (en admettant que f converge en a) ! Ce n'est pas forcément la même chose ! Ne pas oublier qu'une limite correspond à un comportement asymptotique et n'a d'intérêt que quand pour $x \neq a$.

Contre-exemple :
On considère la fonction $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x)$ a un sens, mais $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ en général.

Proposition 1.1 (Se ramener à des limites nulles) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $a \in \overline{I}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f définie sur I. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Démonstration :
C'est un jeu de référentiel. La définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ est la définition du fait que la fonction $x \mapsto |f(x) - \ell|$ tend vers 0 quand x tend vers a. □

Dans la pratique, comme pour les suites et de façon un peu plus systématique que pour les suites, pour montrer qu'une fonction tend vers ℓ, on se "ramènera en 0" en montrant que $|f(x) - \ell|$ tend vers 0.

1.2.2 Lien avec les suites

Théorème 1.2 (Caractérisation séquentielle des limites [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(ii) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Le sens $\boxed{\Rightarrow}$ correspond au théorème vu dans le chapitre sur les suites (composition dans les limites). Il permet également d'établir qu'une fonction n'a pas de limite.

Démonstration :
On ne va traité que le cas $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Les autres étant très similaires.

$\boxed{\text{(i)} \implies \text{(ii)}}$ Soit $\varepsilon > 0$ et une suite (u_n) de $I \setminus \{a\}$ convergente vers a non stationnaire. On sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, si $0 < |x - a| \leq \eta$, alors $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Mais comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, on sait $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \in [a - \eta, a[\cup]a, a + \eta]$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$. Alors $\forall n \geq n_0$, $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$ et donc $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

$\boxed{\text{(ii)} \implies \text{(i)}}$ Par contraposée. On va donc montrer que $\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell \implies \exists (u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \ell$.

On suppose donc que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, $\exists x \in I \cap [a-\eta, a[\cup]a, a+\eta]$, $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n \in I \cap [a - 2^{-n}, a + 2^{-n}] \setminus \{a\}$ tel que $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$. On a donc construit une suite $(x_n) \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$. Donc la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers ℓ et pourtant la suite (x_n) converge bien vers a ($|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$). □

Remarque :
Ce théorème est fondamental. Il permet de se ramener à l'étude systématique de suites. Et donc, en particulier de pouvoir appliquer tout ce qui a été vu sur les suites sur les fonctions.

!!! ATTENTION !!!

Le quantificateur universel est ici fondamental et indispensable ! Il est impératif que cela ne dépende pas de la suite considéré ! On pourrais très bien imaginer que les choses se passent bien pour *certaines* suites, mais toutes. Autrement dit, que les choses soit sympathiques selon le choix de discrétisation que l'on utilise. Mais on ne pourra alors rien en conclure sur le caractère générale du comportement asymptotique.

Contre-exemple :
Il suffit de considérer toutes les fonctions indicatrices utilisant la densité d'un ensemble, par exemple. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'a pas la même limite en tous les points selon qu'on choisis une suite de rationnels, d'irrationnels, ou ni l'un ni l'autre.

1.2.3 Convergence et Divergence

Définition 1.5 (Convergence / Divergence) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

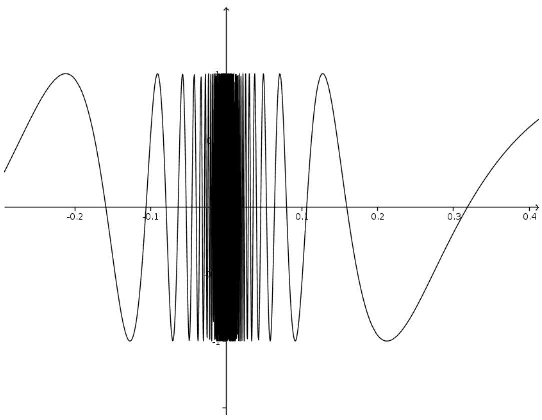
- On dit que f converge en a si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

- Sinon, on dit que f diverge en a.

Déterminer la nature de f en a consiste à déterminer la convergence ou la divergence de f en a. Et dans le cas de la convergence, il faut également déterminer la limite.

Remarque :
On rappelle (comme pour les suites) qu'une fonction peut très bien ne pas avoir de limite en un point donné (ce sera les cas intéressants). Toutes les fonctions n'ont pas de limites partout.

Exemple 1.2 :
Déterminer la nature de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(1/x) \end{array}$ en 0.



Théorème 1.3 (Unicité de la limite [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un singleton, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f converge en a alors $\exists! \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

On peut donc désormais parler de LA limite de f en a et utiliser les notations $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$, après avoir bien pris soin de justifier l'existence de la limite, évidemment.

Démonstration (esquisse) *:*
On peut utiliser la caractérisation séquentielle des limites directement ou on peut adapter la démonstration du cas des suites. $\square$

1.2.4 Limite finie et relation d'ordre

Théorème 1.4 (Toute fonction convergente est bornée au voisinage de a [$\checkmark$]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f converge en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Autrement dit, en détaillant la notion de voisinage, l'énoncé complet du théorème devient :

- Si $a \in \mathbb{R}$ et si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors $\exists \eta > 0$, $f|_{[a-\eta,a+\eta] \cap I \setminus \{a\}}$ est bornée, *i.e.* $\exists \eta > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I$, $0 < |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq M$.
- Si $a = +\infty$ et si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$, alors $\exists A > 0$ tel que $f|_{I \cap [A,+\infty[}$ est bornée, *i.e.* $\exists A > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I \cap [A, +\infty[$, $|f(x)| \leq M$.
- Si $a = -\infty$ et si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$, alors $\exists A < 0$ tel que $f|_{I \cap]-\infty,A]}$ est bornée, *i.e.* $\exists B < 0$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in I \cap] - \infty, B]$, $|f(x)| \leq M$.

Démonstration :
La preuve est la même que pour la version sur les suites. Il faut utiliser l'inégalité triangulaire et le fait que f converge en a. Ou alors on applique la caractérisation séquentielle des limites. $\square$

!!! ATTENTION !!!

⚠ Attention, la réciproque est bien sûr fausse. Comme pour le cas des suites, mais c'est plus flagrant. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}^*$ mais elle ne converge pas en 0. Voir le dessin au dessus.

Proposition 1.5 (Borne d'une fonction à partir d'une borne de la limite [$\checkmark$]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

- Si $\alpha < \ell$, alors il existe $V(a)$ un voisinage épointé de a tel que $\forall x \in I \cap V(a)$, $\alpha < f(x)$.
- Si $\ell < \beta$, alors il existe $V(a)$ un voisinage épointé de a tel que $\forall x \in I \cap V(a)$, $f(x) < \beta$.
- Si $\alpha < \ell < \beta$, alors il existe $V(a)$ un voisinage épointé de a tel que $\forall x \in I \cap V(a)$, $\alpha < f(x) < \beta$.

En détaillant la notion de voisinage pour avoir l'énoncé complet du théorème, on a :

- Si $a \in \mathbb{R}$
  - Si $\alpha < \ell$, alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I \setminus \{a\}$, on a $\alpha < f(x)$.
  - Si $\ell < \beta$, alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I \setminus \{a\}$, on a $f(x) < \beta$.
  - Si $\alpha < \ell < \beta$, alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I \setminus \{a\}$, on a $\alpha < f(x) < \beta$.
- Si $a = +\infty$
  - Si $\alpha < \ell$, alors $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]A, \infty[$, $\alpha < f(x)$.
  - Si $\ell < \beta$, alors $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]A, +\infty[$, $f(x) < \beta$.
  - Si $\alpha < \ell < \beta$, alors $\exists A > 0$, tel que $\forall x \in I \cap]A, +\infty[$, $\alpha < f(x) < \beta$.
- Si $a = -\infty$
  - Si $\alpha < \ell$, alors $\exists B < 0$, tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, B]$, $\alpha < f(x)$.
  - Si $\ell < \beta$, alors $\exists B < 0$ tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, B]$, $f(x) < \beta$.
  - Si $\alpha < f(x) < \beta$, alors $\exists B < 0$ tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, B]$, $\alpha < f(x) < \beta$.

Cette proposition peut également s'énoncer plus simplement de la manière suivante : “Si $\alpha < \ell$, alors $f(x) > \alpha$ pout tout x dans un voisinage de a dans I”. Ce qui est plus agréable, mais il ne faut pas se tromper sur le sens “dans un voisinage de a”. C'est piégeux. On peut se méprendre sur cette définition. Il faut bien la comprendre.

On notera également que cela veut dire que si une fonction tend vers $\ell > 0$ alors elle est strictement positive sur un voisinage de a.

Démonstration :
La démonstration se fait encore comme dans le cas des suites. Il suffit de prendre un $\varepsilon > 0$ plus petit que $\ell - \alpha$ ou $\beta - \ell$ selon le cas (ou les deux). Ou alors par caractérisation séquentielle des limites. $\square$

Exemple 1.3 :
Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est définie au voisinage de a.

!!! ATTENTION !!!

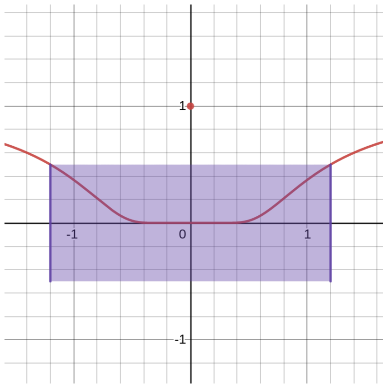
L'hypothèse $x \neq a$ est fondamentale ici. En l'enlevant, le théorème devient faux.

Contre-exemple :

Si on prend la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

on a $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 < 1/2$. Et on a bien $f(x) < 1/2$ pour tout $x \in]-1/\sqrt{\ln(2)}, 0[\cup]0, 1/\sqrt{\ln(2)}[$. Mais c'est faux sur $[-1/\sqrt{\ln(2)}, 1/\sqrt{\ln(2)}]$.



Théorème 1.6 (Passage à la limite dans les inégalités [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$.

Si il existe un voisinage $V(a)$ de a dans I tel que $\forall x \in V(a) \cap I \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.

Autrement dit :

- Si $a \in \mathbb{R}$. Si $\exists \eta > 0$, $\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \cap I \setminus \{a\}$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $a = +\infty$, si $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in [A, +\infty[\cap I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $a = -\infty$, si $\exists B < 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, B] \cap I$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration :
La démo se fait comme pour les suites. On la démontre par contraposée. On suppose que $\ell > \ell'$, on pose $\alpha = (\ell + \ell')/2$ et on applique la proposition précédente. □

Contre-exemple :
Attention, la condition $x \neq a$ est ici aussi très importante (dans le cas $a \in \mathbb{R}$, bien entendu). Prendre par exemple $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -1$ et $g = 0$.

!!! ATTENTION !!!

Même avec des inégalités strictes entre les deux fonctions, on obtient que des inégalités larges au niveaux des limites : par passage à la limite, les inégalités deviennent large.

Contre-exemple :
Il suffit de prendre $f : x \mapsto x/2$ et $g : x \mapsto x$. On a $\forall x > 0,\ f(x) < g(x)$. Et pourtant les limites sont égales en 0. On ne conserve pas l'inégalité stricte.

!!! ATTENTION !!!

La réciproque est bien sûr fausse ! Ce n'est pas parce qu'on a une inégalité large au niveau des limites qu'on peut en déduire quoi que ce soit sur les fonctions. Pour cela, il faudrait une inégalité stricte. C'est le cas d'égalité des limites qui pose problème.

Contre-exemple :
Prendre par exemple $f(x) = x\cos(1/x)$ et $g(x) = x$. Alors $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(\frac{1}{n\pi}) = \frac{(-1)^n}{n\pi}$ et $\forall x > 0,\ g(x) > 0$.

1.3 Limites infinies

1.3.1 Définition

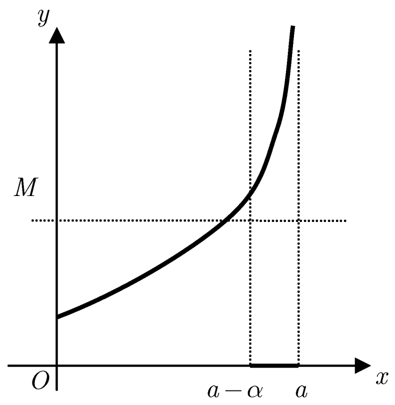
Définition 1.6 (Limites infinies [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On dira que f tend vers $+\infty$ en a, et on notera $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si :

- Si $a \in \mathbb{R}$,
$$\forall A \geq 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \ \Big(0 < |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq A\Big)$$
- Si $a = +\infty$,
$$\forall A \geq 0, \exists B \geq 0, \forall x \in I, \Big(x \geq B \implies f(x) \geq A\Big)$$
- Si $a = -\infty$,
$$\forall A \geq 0, \exists B \leq 0, \forall x \in I, \Big(x \leq B \implies f(x) \geq A\Big)$$

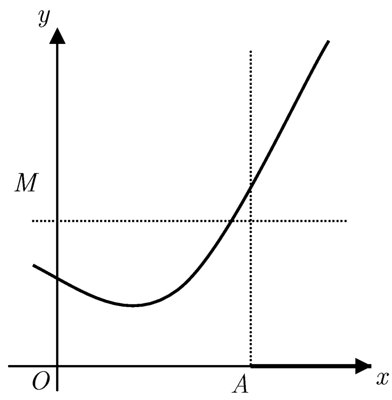
Dans ce cas, on dit que f diverge vers $+\infty$.
On obtient des définitions similaires pour la divergence vers $-\infty$.

Remarque :
Dans le cas $a \in \mathbb{R}$ et où a est une borne de l'intervalle, en fait, ce n'est qu'une moitié d'intervalle $[a-\eta, a+\eta]$ qui nous intéresse (la moitié qui sera dans I selon si a est la borne sup de I ou la borne inf). Il ne faudra pas oublier ce point. On a tendance à ne plus le voir dans les définitions, mais c'est pourtant là.

On va considérer les deux cas $a \in \mathbb{R}$ avec $a = \sup I \notin I$ et $a = +\infty$ avec une fonction divergente vers $+\infty$ dans les deux cas. Les dessins sont similaires dans les autres cas.



$a = \sup I \notin I$



$a = +\infty$

!!! ATTENTION !!!

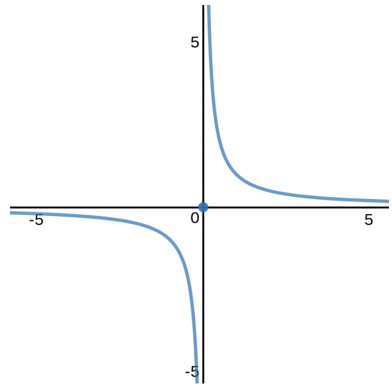
Une fonction f pourrait être définie par morceaux et donc avoir une limite infinie en $a \in \mathbb{R}$ tout en étant définie en a et avoir une valeur finie en a.

Par conséquent, la condition $x \neq a$ est ici, encore une fois, primordiale.

Exemple 1.4 :

Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$



Proposition 1.7 ($-\infty$ et $+\infty$ c'est pareil) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
On a

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \iff -f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$$

Démonstration :
Il suffit de multiplier par -1 et de reprendre les définition. $\square$

1.3.2 Limites infinies et relations d'ordre

Proposition 1.8 (Majorant ou minorant dans le cas d'une limite infinie) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors f est minorée mais non majorée au voisinage de a dans I.
- Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors f est majorée mais non minorée au voisinage de a dans I.

Démonstration :
Là encore, c'est comme pour les suites. $\square$

Remarque :
Cette fois, si f est définie en a, on peut l'inclure dans le voisinage. Ça ne changera rien. Car, compte tenu de la définition de la divergence, en se mettant sut un voisinage de a dans I sans a, f ne sera déjà pas bornée. Donc en particulier, ce sera encore vraie si on rajoute le point a.

1.4 Limites à droite et à gauche

Cette distinction est en réalité très simple. Les paragraphes précédents la contienne. Certaines remarques insistent un peu dessus sans le dire clairement. Mais cette distinction introduit une précision et une difficulté intuitive supplémentaire. C'est la raison pour laquelle elle a été séparée du reste. Le but étant de voir les notions "les plus faciles intuitivement" et de comprendre leurs difficultés pour ensuite préciser les choses et affiner également les difficultés précédentes.

Notation (a^+ et a^-) :
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit a^- et a^+ des notations utilisables uniquement dans le cadre de notions asymptotiques (limites, continuité, dérivabilité, développement limités etc) et signifient respectivement "en a à gauche" et "en a à droite". Autrement dit a^- signifie "en a mais $< a$" et a^+ signifie "en a mais $> a$".

Définition 1.7 (Fonction définie à droite/à gauche, limite à droite/à gauche, semi-convergence [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$.

- On dit qu'une fonction f est définie sur I au voisinage de a à gauche si f est définie sur un voisinage de a dans $I \cap]-\infty, a[$. On dira alors que f admet une limite en a à gauche, si $f|_{I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a. On note alors $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$ cette limite.
- On dit qu'une fonction f est définie sur I au voisinage de a à droite si f est définie sur un voisinage de a dans $I \cap]a, +\infty[$. On dira alors que f admet une limite en a à droite, si $f|_{I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a. On note alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.
- On appelle *semi-convergence de f en a*, la convergence de f en a^+ et en a^-. Autrement dit, l'étude des semi-convergence est l'étude des limite à gauche et à droite de f .

Remarque :
On notera que dans la définition même des semi-convergences, le point a de convergence est automatiquement exclu du voisinage. Dans le cadre de semi-convergence, les notations le permettent plus facilement, ce qui rend les notations plus claires.

Exemple 1.5 :
$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0 \\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0 \\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty$.

Avec des ε, les définitions des limites à droite et à gauche donnent :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I,\ a < x \leq a+\eta \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

et à gauche :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall x \in I,\ a-\eta \leq x < a \implies |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

Les limites à droite et à gauche sont donc simplement des limite pour des restrictions de f. Tous les résultats précédents s'appliquent donc.

Remarque :
La notation a^+ est acceptable, mais attention à ses pièges. Certes, elle permet d'être plus efficient (en terme d'encre utilisé), mais elle peut introduire des confusions. Notamment pour -1^+ et -1^- par exemple.

Il est conseillé d'utiliser la notation $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell$ et son homologue, plus lourde en notation mais ô combien plus claire.

Remarque :
La notion de semi-convergence ne peut avoir de sens que pour $a \in \mathbb{R}$. Si $a = \pm\infty$, on a automatiquement une seule semi-convergence à étudier. Puisque qu'on ne peut pas “dépasser a” ni même lui être égal.

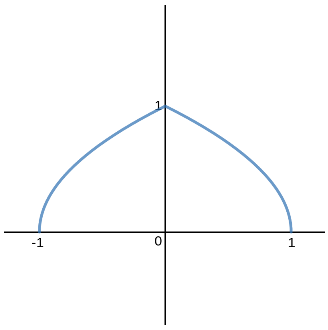
Proposition 1.9 (Caractérisation des limites par les demi-limites) :
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \ell \end{cases}$$

Démonstration :
C'est évident en reprenant la définition de la limite d'une fonction. □

Exemple 1.6 :
On définit

$$f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-|x|} \end{array}$$



Déterminer la limite de f en 0.

Remarque :
En général, les limites suffisent (sans faire la distinction de limite à droite ou à gauche). Mais dans le cas où il pourrait y avoir un problème, que le comportement de la fonction étudiée n'est pas le même à droite ou à gauche du point (pour une fonction définie par morceaux, par exemple), il faudra revenir au cas des demi-limites.

1.5 Opérations sur les fonctions admettant des limites

Dans ce paragraphe, on s'occupera essentiellement des limites en un point, sans distinctions des limites à droite ou à gauche. Il est facile de voir que tous ces résultats reste encore vrais avec les demi-limites. Mais le cadre le plus utile et le plus fréquent étant celui des limites ("complète"), on se limitera à cette formulation.

Évidemment, si l'on voulait être tout à fait exhaustif, il faudrait réécrire chacun des énoncés dans chacun des cas possibles ($a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{R}$, a^+, a^- etc). Ce qui deviendrait trop lourd.

Dans la mesure où tous les résultats vont se déduire directement des même résultats sur les suites avec la caractérisation séquentielle des limites, on va se permettre d'être un peu moins exhaustif et un peu moins explicite dans les énoncés.

1.5.1 Opérations classiques et limites

Proposition 1.10 (Sommes et produit) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell'$.

(i) Si $\ell + \ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'$

(ii) Si $\ell\ell'$ est définie dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell\ell'$.

Démonstration :
Il suffit d'appliquer le théorème que l'on connaît déjà sur les suites avec la caractérisation séquentielle des limites. □

Remarque :
On vient de dire que dès que l'on ne tombe pas sur une forme indéterminée, la limite existe et on sait comment la calculer. En particulier, on vient donc de dire que si $\ell \neq \pm\infty$ et $\ell' \neq \mp\infty$, la somme a une limite. De même, le produit a une limite sauf si l'une des deux vaut 0 et l'autre est infini.

On vient donc de justifier de la convergence de $\lambda f + \mu g$ en a si f et g convergent en a. D'où la reformulation :

Corollaire 1.11 (Linéarité de la limite) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I}$. Si on note $E_{I,a} = \{f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}),\ f \text{ converge en } a\}$, alors $E_{I,a}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \mapsto \lim_{x\to a} f(x)$ est une forme linéaire sur $E_{I,a}$.

La démonstration consiste essentiellement à reprendre la définition des limites, avec des combinaisons linéaires de fonctions convergentes en a. Ce n'est qu'un jeu d'écriture. Ou on peut utiliser la caractérisation séquentielle des limites (ce qui est mieux).

On a le même résultat avec des demi-limites : l'ensemble des fonctions convergentes à droite (resp. à gauche) en a est un $\mathbb{R}$-ev et la limite à droite (resp. à gauche) est une forme linéaire sur cet ensemble.

Remarque :
Ce résultat contient en particulier l'existence de toutes les limites de $\lambda f + \mu g$ si f et g converge en a, avec, en plus, la valeur de ces limites.

Remarque (HP) :
En fait, le résultat initial nous dit même que cette forme linéaire est compatible avec le produit de fonctions. C'est donc plus qu'une forme linéaire. C'est en réalité un morphisme d'algèbre.

Proposition 1.12 (Passage à l'inverse) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{\ell}$
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$
3. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^-$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$
4. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$
5. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0^-$

Démonstration :
Comme pour la propriété précédente, on utilise ce que l'on sait déjà sur les suites que l'on applique aux fonctions grâce à la caractérisation séquentielle des limites. □

Corollaire 1.13 :
On a les rapports de limites en faisant un produit fois un inverse de fonction

On a donc les tableaux le résumé :
Limite d'une somme

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim_a f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a fg$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite $\neq 0$ au dénominateur

$\lim_a f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\lim_a f/g$	ℓ/ℓ'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient avec une limite nulle au dénominateur

$\lim_a f$	$f(x) > 0$	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) < 0$	0
$\lim_a g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_a f/g$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

!!! ATTENTION !!!

⚠ Toutes autres formes qui n'est pas explicitement dans ces tableaux est une forme indéterminée. En particulier, les limites de la forme 1^∞ sont des FI. Ainsi que les 0^0. Il faudra voir en dessous pour les lever.

!!! ATTENTION !!!

⚠ La dénomination a un sens ! Attention aux mots qu'on utilise ! Si on a une forme indéterminée, c'est que la limite ne peut être étudié sous CETTE forme. Il faut donc changer de forme pour lever l'indétermination et étudier le comportement asymptotique.

Vous vous en doutez, les seuls cas intéressant seront précisément les formes indéterminées.

Théorème 1.14 (Limite d'une composée) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles non vides et non réduits à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Alors

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ f(I) \subset J \\ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell \end{array}\right\} \implies g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell.$$

Démonstration (Esquisse) *:*
On est obligé de l'écrire et on ne peut pas utiliser la caractérisation séquentielle puisqu'on ne l'a pas montré à ce moment là. Pour la démonstration, il suffit d'utiliser des $\varepsilon > 0$. Il va en falloir 2. Dans le cas où $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\exists \eta > 0$ tel que $|x - a| \leq \eta$ implique $|f(x) - b| \leq \gamma$ et $|y - b| \leq \gamma$ implique $|g(y) - \ell| \leq \varepsilon$. Donc si $|x - a| \leq \eta$, alors $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$. Il faut bien sûr adapter cette idée au cas où a ou b serait l'infini. □

Remarque :
On notera que la condition $f(I) \subset J$ nous assure que $b \in \overline{J}$. Il n'est donc pas nécessaire de rajouter cette hypothèse qui semblait pourtant manquer. En fait, elle est là.

Remarque :
Grâce à ce résultat, on a facilement

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} \ell$$

Il est donc classique de se ramener à l'étude d'une limite en 0 par le changement de variable $x = a+h$ (surtout pour le prochain chapitre et les DL)

Exemple 1.7 :
Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ (1 + a/x)^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} e^a.$$

1.5.2 Théorème des gendarmes

Théorème 1.15 (Théorème des gendarmes pour les fonctions [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si :

(i) il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que

$$\forall x \in I \cap V(a) \setminus \{a\},\ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

(ii) $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

Démonstration :
Là encore, on utilise le théorème des gendarmes des suites et la caractérisation séquentielle des limites de fonctions. □

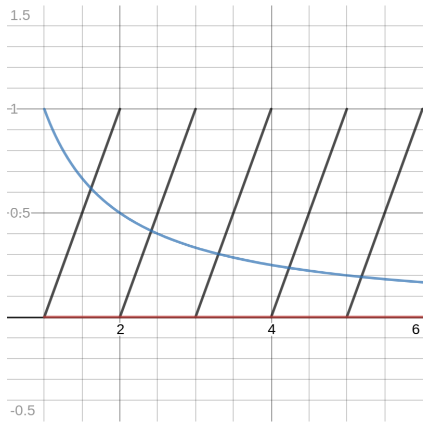
Exemple 1.8 :
Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

!!! ATTENTION !!!

Il est vitale que l'inégalité soit vérifiée sur un voisinage de a dans I en entier. Les quantificateurs sont indispensables ici.

Contre-exemple :

On considère les fonctions $g : x \mapsto 1/x$, $h : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ sur $[1, +\infty[$.
On a facilement $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ mais $f(x) \not\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.



Corollaire 1.16 (Corollaire du théorème des gendarmes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a dans I, et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors f converge en a vers ℓ.

Démonstration :
Bon c'est pas dur. Soit caractérisation séquentielle, soit l'application directe. $\square$

Proposition 1.17 (Produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f est bornée au voisinage de a et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Démonstration :
Ça peut se faire encore et toujours par les suites ou directement. Il suffit de l'écrire. □

Proposition 1.18 (Corollaire du théorème des gendarmes en l'infini) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose également que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x dans un voisinage de a dans I.

(i) Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

(ii) Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Démonstration :
Les suites, on aime beaucoup les suites ... □

Exemple 1.9 :
Étudier le comportement asymptotique de $x \mapsto x^2 + x\sin(x)$ en $+\infty$.

1.5.3 Théorème de la limite monotone

Théorème 1.19 (Théorème de la limite monotone [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

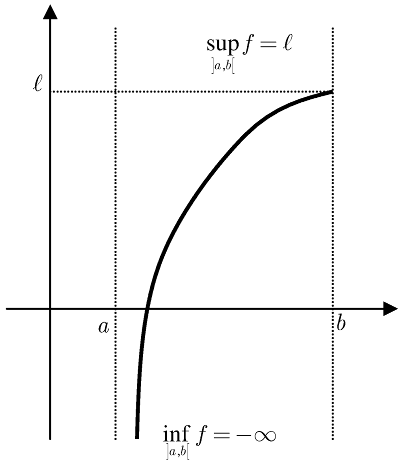
Si f est monotone, alors f admet des limites en a et en b (éventuellement infinies) et plus précisément

- Si f est croissante alors,

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \inf_{x \in]a,b[} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \sup_{x \in]a,b[} f(x)$$

- Si f est décroissante, alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sup_{x \in]a,b[} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \inf_{x \in]a,b[} f(x)$$



Démonstration :
On ne va faire que la démonstration de la limite en b dans le cas où f est croissante. Pour le cas décroissant, on applique le cas croissant à $-f$.

Supposons que f ne soit pas majorée. Donc $\sup_{]a,b[} f = +\infty$. Soit $M \geq 0$. Comme f n'est pas majorée, on sait qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geq M$. La croissance de f nous permet alors d'avoir $\forall x \in [x_0, b[$, $f(x) \geq f(x_0) \geq M$. D'où $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$.

Supposons maintenant que f soit majorée. Donc $\sup_{]a,b[} f = \ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe un $x_0 \in]a, b[$ tel que $\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq \ell$. Encore une fois, la croissance de f et la définition de $\sup f$ (c'est un majorant) nous donne : $\forall x \in [x_0, b[$, $\ell - \varepsilon \leq f(x_0) \leq f(x) \leq \ell$. D'où $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell$. $\square$

On aurait bien sûr pu utiliser les suites. Mais utiliser les bornes sup n'est pas un mauvais exercice non plus.

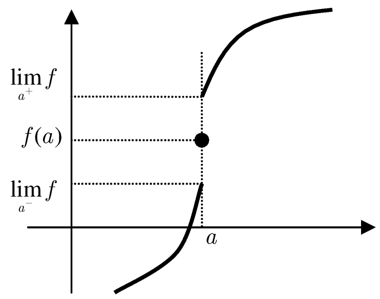
Remarque :
On notera, évidemment, que ce théorème fonctionne encore pour une fonction définie sur un intervalle contenant ses bornes. Mais le fait que f soit définie aux bornes de l'intervalle n'intervient pas dans la définition des limites. Ce n'est pas nécessaire.

Corollaire 1.20 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point[a]. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ un point de l'intérieur de I[b].

Si f est croissante, alors f converge en a^- et en a^+ et

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

a. ici c'est important
b. donc qui n'est pas une borne de I



Démonstration :
C'est une application de ce qui précède à $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ et $f|_{I \cap]a, +\infty[}$. □

Remarque :
Ce théorème est TRÈS important. C'est la base des soucis et de l'étude de la continuité. Il faut impérativement avoir ce dessin en tête quand on traite des questions de continuité.

On voit bien dans ce dessin que la fonction est parfaitement définie en a et même sur un voisinage de a. Mais en chaque point, la gauche et la droite du point peuvent être très différentes de ce que se passe au point. Faire donc très attention. On a tendance à dire que la limite à gauche en un point où la fonction est définie est forcément la valeur en le point. Ce n'est PAS vrai. C'est notre cerveau à l'habitude de travailler dans des conditions physiques "normales" où les fonctions sont forcément continues et où ça "marche bien". Les maths ne correspondent pas vraiment à la réalité de tous les jours, à la réalité physique. Les maths ce n'est pas "la réalité". C'est mieux.

Exemple 1.10 :
Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \lfloor x \rfloor$ a des limites à droites et à gauche en tout points de $\mathbb{R}$.

1.6 Limites de références

Pour ne pas trop surchargé ce cours qui est déjà pas mal dense, les limites de références sont parsemés dans les autres chapitres. Il faut aller voir les fonctions de références d'abord, puis l'analyse asymptotique, puis les DL et aussi un peu dans le chapitre de la dérivation.

2 Continuité en un point

2.1 Définition

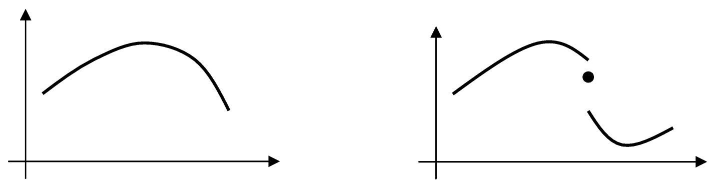
Définition 2.1 (Fonction continue en un point [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ [a].
On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ \Big(|x-a| \leq \eta \implies |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon\Big)$$

Sinon, on dit que f est discontinue en a.

a. On notera que cette fois, on doit avoir a dans I, vraiment. Il faut que f soit définie en a.

Moralement, la notion de continuité est liée à la possibilité de dessiner la fonction. Une fonction continue est une fonction que l'on peut dessiner sans lever le crayon, dont on peut dessiner le graphe d'un seul trait de crayon, dont le graphe est d'un seul tenant. C'est ce qui a servi de définition pour la continuité pendant longtemps. Mais cette définition n'est pas très précise et peu pratique. Elle a disparu et été remplacée par celle donnée ici au moment de l'avènement de la formalisation au 19eme siècle.



Fonction Continue Fonction non continue

Exemple 2.1 :
Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \cos x$ etc sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Dans la définition, on voit que pour qu'une fonction soit continue en un point, il faut comparé des images de points à $f(a)$. Donc une fonction ne peut être continue qu'en un point où elle existe déjà. Si une fonction n'existe pas en un point, on ne peut pas étudier sa continuité. Ça n'a pas de sens. Puisqu'elle n'existe pas.

Une fonction ne peut pas avoir de propriété ponctuelle en un point où elle n'existe pas. Ce détail (qui n'en est pas du tout un) aura de lourdes conséquences dans quelques pages.

Théorème 2.1 (Caractérisation de la continuité en a par les limites [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors

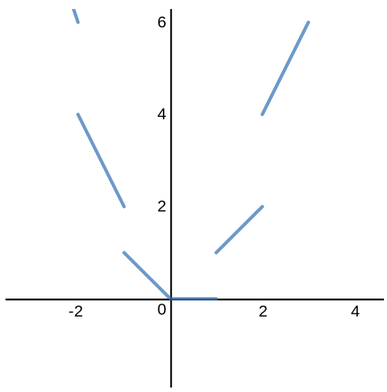
$$f \text{ continue en } a \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

Démonstration :
Ce n'est que la définition de la continuité qu'il faut voir comme une limite. $\square$

Remarque :
On notera que dans la définition de la continuité, par rapport à la définition de la limite, on autorise en plus x à être égal à a. En fait, ce n'est intéressant, comme pour les limites, seulement quand $x \neq a$. C'est trivialement vrai en a.

<u>Exemple</u> 2.2 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ est continue en 0 mais n'est continue en aucun points de $\mathbb{Z}^*$.



Définition 2.2 (Continuité à droite, continuité à gauche, semi-continuité [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dira que f *est continue à gauche en* a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x \leq a \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- On dira que f *est continue en* a *à droite* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a \leq x \leq a + \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- On dit que f est *semi-continue en* a si elle est continue à gauche ou à droite en a.

Remarque :
Une fonction f est donc continue à droite en a si $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est continue et f est continue à gauche si $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est continue (on inclue ici la borne a car f doit être définie en a pour pouvoir y être continue).

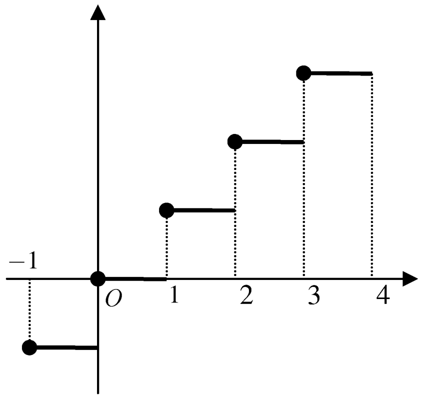
Théorème 2.2 (Caractérisation semi-continuité par les limites) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f est continue à gauche en a si, et seulement si, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} f(a)$
- f est continue à droite en a si, et seulement si, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} f(a)$

Démonstration :
C'est simplement la comparaison de la définition de la continuité à droite ou à gauche avec la limite à droite ou à gauche. $\square$

Exemple 2.3 :

La fonction partie entière est continue à droite en tout point.



Proposition 2.3 (Caractérisation de la continuité en a par semi-continuité [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

$$f \text{ continue en } a \iff f \text{ continue à droite } \textbf{et} \text{ à gauche en } a.$$

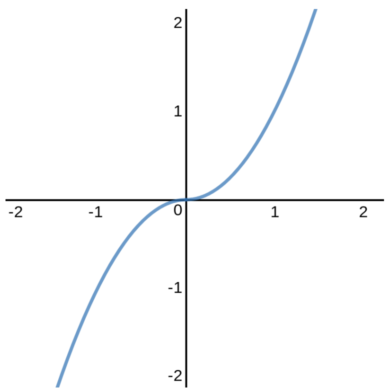
Démonstration :
C'est l'écriture de la continuité en a qui s'écrit comme les deux en même temps. □

Exemple 2.4 :

La fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est continue en 0.



En d'autres termes, en l'écrivant très mal, on a

$$\begin{array}{ccccccc} & & & f(a) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ f \text{ continue en } a & \Longleftrightarrow & f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} & \ell & \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longleftarrow} f(x) \end{array}$$

!!! ATTENTION !!!

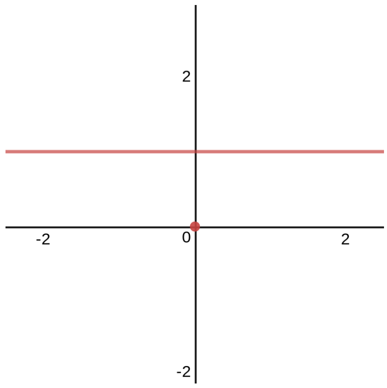
Il est vital d'avoir TOUTES ces égalités. S'il en manque une seule, f n'est pas continue.

Contre-exemple :

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors f n'est pas continue en 0 bien que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$.



Théorème 2.4 (Caractérisation séquentielle de la continuité en a [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

$$f \text{ continue en a} \iff \Big(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\Big).$$

Démonstration :
C'est l'application de la caractérisation de la continuité par les limites et de la caractérisation séquentielle des limites en même temps. □

Dans la pratique, on retiendra :

$$f \text{ continue en } a \iff \forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}} \text{ convergente vers } a,\ f(\lim u_n) = \lim f(u_n)$$

En particulier, on retiendra que l'image continue d'une suite convergente est une suite convergente, ce qui est un corollaire du théorème de limite de l'image d'une suite par une fonction convergente.

Exemple 2.5 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Remarque :
On vient de démontrer le théorème de convergence de suite par composition de limite (en plus complet). Par exemple, si on considère la suite $u_n = (1 + x/n)^n$, on a $u_n \to e^x$ par continuité de l'exponentielle en x et par caractérisation séquentielle de la continuité.

Toutes les compositions dans les limites qui étaient un peu mystérieuses jusque là sont en fait des caractérisations séquentielles de continuités.

Il est donc recommandé de reprendre les exercices du TD sur les suites et de regarder toutes les convergences étudiées avec le point de vue caractérisation séquentielle pour combler les trous.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 2.5 (Opérations sur les fonctions continues en un point) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $a \in I$. On note $E_{I,a}$ l'ensemble $E_{I,a} = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ f \text{ continue en } a\}$.

Alors $E_{I,a}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel vérifiant :

- $\forall f, g \in E_{I,a},\ fg \in E_{I,a}$
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g} \in E_{I,a}$.

Démonstration :
Ça vient des opérations sur les fonctions convergentes. □

Théorème 2.6 (Continuité et composition [✓]) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors :

$$\left.\begin{array}{r} f(I) \subset J \\ f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ continue en } a$$

Démonstration :
On a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{y \to f(a)} g(y) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Donc $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to f(a)} g(y) = g \circ f(a)$ □

C'est un problème de cascade :

$$\left.\begin{array}{ccccl} a \in I & \xrightarrow{f} & f(I) & & \text{continue en } a \\ & & \bigcap & & \\ & & J & \xrightarrow{g} \ \mathbb{R} & \text{continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow I \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R} \text{ continue en } a$$

Exemple 2.6 :
Donner le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{\ln(\arcsin(e^x))}$ et étudier sa continuité en 0.

Remarque :
On notera que la notion de continuité est une notion locale, une notion ponctuelle. Une application ne peut être continue qu'en un point, éventuellement plusieurs, voir beaucoup de points. Mais il faut étudier chaque point séparément et indépendamment.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Définition

Définition 3.1 (Continuité sur un intervalle) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

- On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des applications définies sur I et continues sur I.

Remarque :
Donc

$$f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \iff \forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta,\ |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$$

Exemple 3.1 :
Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \cos x$ etc sont des fonctions continues sur leur ensemble de définition.

Remarque :
Attention aux différents intervalles liés à une fonction :

intervalle de continuité $\subset$ intervalle de définition

Une fonction peut être définie en un point sans y être continue. Mais si une fonction est continue en un point, elle y est obligatoirement définie.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Pour nous, la continuité n'aura de sens que sur un intervalle. On devra toujours se ramener à un intervalle.

Remarque :
Dans le cas où l'on étudie une fonction sur une réunion d'intervalle disjoints, la continuité sur la réunion correspondra à la continuité sur chacun des intervalles de la réunion. Par exemple :

$$(x \mapsto 1/x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}) \iff (x \mapsto 1/x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_-^*,\mathbb{R}).$$

En particulier, en étudiant la continuité en un point particulier, on devra considérer un voisinage dans un intervalle. Si on veut étudier la continuité de $x \mapsto 1/x$ en $1/n$, on prendra un voisinage de $1/n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Et donc, il faudra prendre un voisinage de la forme $\mathbb{R}_+^* \cap [1/n-\eta, 1/n+\eta]$. Ce qui pourra découper le voisinage si $1/n - \eta < 0$.

3.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 3.1 (Opérations sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Alors $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit et passage à l'inverse, *i.e.* si $f, g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$:

(i) $fg \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$

(ii) Si g ne s'annule par sur I, $1/g \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Démonstration :
Ça vient de la propriété ponctuel mais en tout points. □

Remarque :
Dans le cas de quotient de fonctions continues, on n'oubliera PAS de vérifier que le dénominateur ne s'annule pas. Il y a 3 choses à vérifier. La continuité du numérateur et dénominateur ET que le dénominateur ne s'annule pas.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Ne pas confondre "f non nulle" et "f ne s'annule pas". Le premier correspond à "$f \neq 0$" autrement dit à "$\exists x_0 \in I,\ f(x_0) \neq 0$" alors que le second correspond à "$\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$", autrement dit "$f$ n'est jamais nulle".

Il ne faut pas confondre les deux. La seconde proposition est plus forte et implique la première.

Exemple 3.2 :
Montrer que $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2 (Continuité d'une composée) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Démonstration :
Ça vient aussi de la continuité ponctuelle d'une composée de fonction. $\square$

Là aussi, c'est des cascades :

$$\left.\begin{array}{lllll} I & \xrightarrow{f} & f(I) & & \text{continue sur } I \\ & & \cap & & \\ & & J & \xrightarrow{g} \ \mathbb{R} & \text{continue sur } J \end{array}\right\} \implies I \xrightarrow{g\circ f} \mathbb{R} \quad \text{continue sur } I$$

Remarque :
Ces deux théorèmes sont fondamentaux. C'est avec ceux là qu'on montre qu'une fonction est continue. Il suffit de décomposer comme il faut la fonction à étudier pour l'écrire sous la forme d'une somme/composée/produit/quotient de fonctions continues. Et le tour est joué.

On rappelle que toutes les fonctions de références sont continues sur leur ensemble de définition (voir dans le chapitre sur les fonctions usuelles, les fonctions trigonométriques, exponentielles, puissances, logarithmes, trigonométriques réciproques et hyperboliques).

Exemple 3.3 :
La fonction

$$x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sin(x)^2 + 1}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3 (Continuité de $\min$, $\max$ et $|f|$) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Alors $|f|$, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont des fonctions continues sur I.

Démonstration :
La fonction $|f|$ continue par composée de fonction continue. Ensuite, on a $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ et $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ donc qui sont également continues par composées puis sommes de fonctions continues. $\square$

Exemple 3.4 :
En particulier, $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$ sont des fonctions continues.

3.3 Restrictions, prolongements de fonctions continues

Proposition 3.4 (Continuité d'une restriction [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $J \subset I$ un intervalle non vide et non réduit à un point.
Alors $f\big|_J$ est continue sur J, *i.e.* $f\big|_J \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$.

Démonstration :
Il suffit d'écrire la définition de la continuité de $f\big|_J$. Comme on a $J \subset I$ et f continue sur I, ça fonctionnera. □

Définition 3.2 (Prolongement par continuité [✓]) :
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles non vides et non réduits à un point tels que $I \subset J$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

- On appelle *prolongement par continuité de f à J*, toute fonction $\widetilde{f} : J \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}$ prolonge f et $\widetilde{f}$ continue sur J. Autrement dit, un prolongement par continuité de f à J est une fonction $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ telle que $\widetilde{f}\big|_I = f$.
- Si f admet un prolongement par continuité à J, on dira alors que f *est prolongeable par continuité* à J.

!!! ATTENTION !!!

Il faut être délicat. Le principe de la prolongation par continuité consiste à rendre existante une fonction là où elle n'existe pas et de le faire en conservant la continuité. Ce qui suppose de connaître déjà la continuité de f là où elle existe.

Il y a donc plusieurs problèmes. On a déjà vu qu'il y a des choix à faire pour prolonger une fonction. Ici, il faudra donc faire les bons choix pour conserver la continuité. Le but de la suite va être d'essayer de comprendre comment faire ces choix.

Mais attention à la formulation ! La formulation doit clairement indiqué qu'il y a une action de la part de l'auteur (donc vous) pour l'étendre. On (nous, vous) la rend existante là où elle ne l'était pas. La formulation doit être claire à ce sujet. Elle n'existait pas avant votre intervention (elle ne pouvait donc a fortiori pas être continue en ces nouveaux points). On ne manipule pas de la même manière une fonction qui existe quelque part par définition de la fonction, qui est, qui existe ; et une fonction qui n'existe pas et que, par opération presque divine, on fait exister.

Café philo

La notion de prolongement présuppose une non-existence. On ne peut pas prolonger quelque chose en un endroit où on existe déjà. D'après Larousse, prolonger correspond à une augmentation, à faire durer plus longtemps. On ne peut pas faire durer plus longtemps quelque chose qui est déjà au maximum de sa durée. On ne peut pas étirer quelque chose qui prend déjà toute la place disponible. Pour pouvoir rallonger, il faut avoir de la place inoccupée, et que ce que l'on veut étirer d'occupe pas cette place. Bref, on ne peut prolonger quelque chose qu'en un endroit où cette chose ne pré-existe pas déjà.

Attention à cette difficulté. Elle va poser pas mal de problème métaphysique lors du prochain cours.

D'autre part, attention à la grammaire utilisée. Une fonction est prolongeable par continuité s'il est possible de lui trouver un prolongement continue. Ce qui ne veut pas dire qu'on sait le faire. Le fait d'être prolongeable veut dire qu'il y a une façon, mais pas forcément explicite ou explicitée, de le faire. C'est deux problèmes différents et potentiellement indépendants que de montrer qu'il est possible de faire quelque chose et réussir à faire cette chose.

Il est facile de montrer qu'il est possible de faure un saut périlleux, suivi d'un double axel, avec les yeux bandés et les pieds attachés sur un skateboard, que de réussir à le faire.

Remarque :
Dans la pratique (on en a déjà parlé dans le chapitre sur les ensembles en applications), prolonger une fonction est très délicat, à cause de la profusion de possibilités pour la prolonger. Parmi toutes les façons de prolonger, certaines seront meilleures que d'autres. Mais il en restera beaucoup (trop). Nous n'aurons une méthode pour "bien" prolonger qu'en une borne d'un intervalle.

Théorème 3.5 (Caractérisation des fonctions prolongeable par continuité en une borne d'un intervalle [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ une borne de I qui n'appartienne pas à I (donc $a = \inf I \notin I$ ou $a = \sup I \notin I$). Alors :

$$f \text{ est prolongeable par continuité en } a \iff \exists \ell \in \mathbb{R},\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Le prolongement continue $\widetilde{f}$ est *unique* et est définie par :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

Démonstration :
Il faut démontrer l'équivalence et aussi l'unicité. Il y a donc 3 choses à démontrer (les deux sens de l'équivalence et l'unicité). On commence par l'équivalence et on terminera par l'unicité.

$\boxed{\Leftarrow}$ Il suffit de montrer que la fonction $\widetilde{f}$ proposée est bien un prolongement par continuité de f. D'abord, par définition de $\widetilde{f}$, on a clairement $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, donc $\widetilde{f}\big|_I = f$ et donc $\widetilde{f}$ est bien un prolongement de f. Ensuite, $\widetilde{f}$ est continue sur I car c'est le prolongement d'une fonction continue sur I (appliquer la proposition de continuité d'une restriction). Il faut juste étudier donc la continuité de $\widetilde{f}$ en a. Mais on sait que $f(x) = \widetilde{f}(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in I}]{} \ell = \widetilde{f}(a)$. Donc $\widetilde{f}$ est continue en a. Donc elle est continue en tout point de $I \cup \{a\}$ donc $\widetilde{f} \in \mathcal{C}(I \cup \{a\}, \mathbb{R})$. C'est donc bien un prolongement par continuité de f.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est prolongeable par continuité en a. Donc $\exists \widetilde{f} \in \mathcal{C}(I \cup \{a\}, \mathbb{R})$ telle que $\widetilde{f}\big|_I = f$. Mais comme $\widetilde{f}$ est continue en a, on sait que $\widetilde{f}(x) = f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in I}]{} \widetilde{f}(a)$. Donc $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $\widetilde{f}(a) \in \mathbb{R}$.

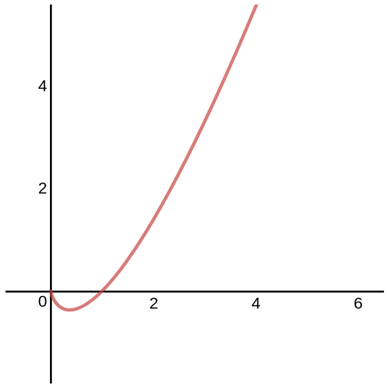
Il reste donc à montrer l'unicité. Supposons qu'il existe deux prolongement f_1 et f_2 par continuité de f en a. Alors $\lim_{x \to a} f_1(x) = f_1(a)$ et $\lim_{x \to a} f_2(x) = f_2(a)$ par caractérisation de la continuité par les limites. Or $\forall x \in I,\ f_1(x) = f(x) = f_2(x)$. Et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ par hypothèse. Donc $f_1(x) = f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $f_2(x) = f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. Alors, par unicité de la limite et par caractérisation de la continuité par les limites, $f_1(a) = \ell = f_2(a)$.

On a donc $\forall x \in I \cup \{a\},\ f_1(x) = f_2(x)$, et donc, par définition de l'égalité entre applications, $f_1 = f_2$. D'où l'unicité du prolongement pas continuité en a. □

Exemple 3.5 :

Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln x \end{array}$$

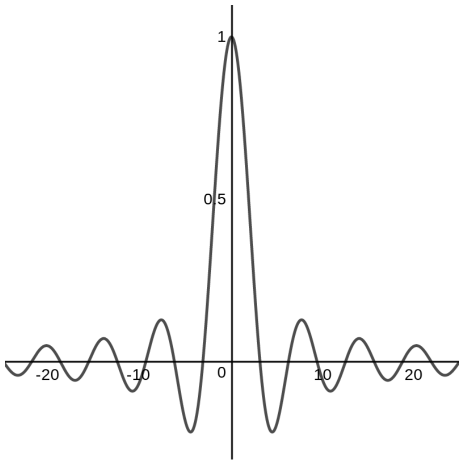


Exemple 3.6 :

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0



Remarque :
Dire qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point revient en fait à dire que la fonction admet une limite finie en ce point et qu'elle est continue autour du point.

Proposition 3.6 (Égalité sur $\mathbb{Q}$ de fonctions continues) :
Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et si $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, alors $f = g$.

Démonstration :

On considère $x \in \mathbb{R}$. Alors, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Par égalité de f et g sur les rationnels, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = g(r_n)$.

Or par continuité de f et g et par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \qquad \text{et} \qquad g(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$$

Par unicité de la limite, on en déduit donc $f(x) = g(x)$ et donc l'égalité. □

Exemple 3.7 (Endomorphismes continues de $(\mathbb{R},+)$ [✓]) :
Déterminer les homomorphismes continues en 0 de $(\mathbb{R},+)$, *i.e.* déterminer les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

3.4 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 3.7 (Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a, b \in I$ tels que $a \leq b$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

Si f est continue sur I alors $\big[\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))\big] \subset f([a,b])$.

Autrement dit, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, ou encore le segment de bornes $f(a)$, $f(b)$ est inclus dans l'image de f. En particulier, si $f(a) \leq f(b)$, on a donc $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$.

Démonstration :
Sans perte de généralités, on peut supposer $f(a) \leq f(b)$, quitte à considérer $-f$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$. On souhaite montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$. Si $y = f(a)$ ou $y = f(b)$, il n'y a rien à faire. On va donc supposer que $y \in]f(a), f(b)[$.

On considère l'ensemble

$$A = \{c \in [a,b],\ \forall t \in [a,c],\ f(t) \leq y\}.$$

Par définition, $A \subset \mathbb{R}$. Bien entendu, on a $a \in A$, puisque $f(a) \leq y$ par choix de y. Donc $A \neq \emptyset$. On a également $A \subset [a,b]$ donc A est majoré par b. Par propriété de la borne sup de $\mathbb{R}$, on en déduit que A admet une borne sup que l'on va notée α. Donc $\alpha = \sup A$. On va montrer que α est l'élément recherché.

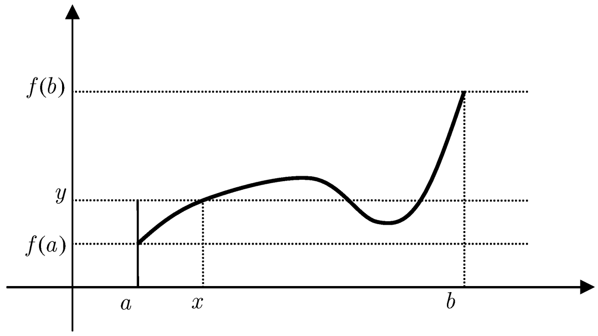
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en α, par définition de la continuité, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[\cap [a,b]$, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$. Par ailleurs, par caractérisation de la borne sup dans $\mathbb{R}$, on sait $\exists c \in A$ tel que $\alpha - \eta < c \leq \alpha$. Alors $|f(c) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$. Donc en particulier $f(\alpha) \leq f(c) + \varepsilon \leq y + \varepsilon$ par définition de A.

Par définition de la borne sup, si on considère $t \in]\alpha, \alpha + \eta[\cap [a, b]$, alors $t \notin A$. Donc, par définition de A, $f(t) > y$. Mais on a toujours $|f(t) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$ par continuité de f en α. On a donc en particulier $f(\alpha) \geq f(t) - \varepsilon > y - \varepsilon$.

On vient donc de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0,\ y - \varepsilon < f(\alpha) \leq y + \varepsilon.$$

On en déduit alors facilement $f(\alpha) = y$ en passant à une borne inf, par exemple. $\square$



!!! ATTENTION !!!

Le TVI nous fournit seulement l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = \alpha$. Mais il ne nous fournit certainement pas l'unicité. Il n'y a d'ailleurs en général pas unicité. En fait, le TVI nous permet d'avoir seulement la surjection de f. On pourrait d'ailleurs l'exprimer en ces termes. On pourrait dire que si f est continue alors f est surjective sur le segment définie par $f(a)$ et $f(b)$. Mais un élément dans cet intervalle a alors un antécédent, nécessairement, car f est surjective, mais n'est certainement pas unique. Il faudrait ajouter un argument d'injectivité pour pouvoir avoir l'unicité. Par exemple, une monotonie stricte. C'est ce qu'on va faire plus tard.

Remarque (HP ?) :
Les hypothèses du TVI ne sont pas nécessaires. Elles sont seulement suffisantes. Par exemple, le théorème de Darboux montre que pour une fonction dérivable sur un intervalle, la dérivée va vérifier la propriété du TVI même si elle n'est pas continue.

Mais sans aller jusqu'à la dérivabilité, on peut considérer la fonction $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})$. Alors f n'est continue que en 0 (exercice), définie sur $\mathbb{R}$ et pourtant, $\forall a \in \mathbb{R}$, $[\min(f(a), f(-a)), \max(f(a), f(-a))] \subset f([-a, a])$. Ça provient de la bijectivité de f (facile à montrer).

Le TVI a, en fait, plusieurs formulation. Beaucoup, en réalité. Donc pour être tout à fait rigoureux, on ne devrait appeler aucun théorème TVI. Vu qu'il y en a plusieurs. Ou alors il faudrait donner ce nom au théorème, le plus général, celui qui englobe tous les autres, le plus abstrait et donc, le plus difficile. On en verra d'autres formes.

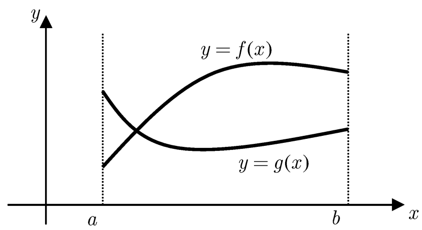
Corollaire 3.8 (Corollaire du TVI pour la recherche de zéros de fonctions) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$ avec $a \leq b$.

Si $f(a)f(b) \leq 0$, alors f s'annule sur l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration :
C'est l'exacte application du TVI. Si le produit $f(a)f(b)$ est négatif, alors $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas le même signe et donc 0 est dans l'intervalle définie par ces deux valeurs et donc le TVI nous assure l'existence d'un zéro dans l'intervalle $[a, b]$. □

Exemple 3.8 :

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $f(a) \leq g(a)$ et $f(b) \geq g(b)$. Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.



Remarque :
Grâce au TVI, la méthode par dichotomie (que vous avez vu en info), nous permet de trouver des approximations des équations du type $f(x) = \alpha$. Typiquement, on utilisera la méthode par dichotomie pour trouver les zéros d'une fonctions.

Proposition 3.9 (Algorithme de dichotomie) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On construit les suites (a_n) et (b_n) de $[a, b]$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$, on pose
  - $a_{n+1} = a_n$
  - $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0$, on pose
  (a) $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$
  (b) $b_{n+1} = b_n$

Alors (a_n) et (b_n) sont adjacentes et converge vers une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Démonstration :
On se place dans le cas $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.

On a $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq 0 \leq f(b_0)$. On suppose $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ construits pour un certaine $n \in \mathbb{N}$. On a donc $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $f(a_i) \leq 0 \leq f(b_i)$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b_i - a_i = \frac{1}{2}(b_{i-1} - a_{i-1})$.

Alors, en construisant a_{n+1} et b_{n+1} comme dans l'énoncé, dans les deux cas, on obtient $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = 1/2(b_n - a_n)$ et $f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$.

Enfin $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ nous permet de dire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc convergences de même limite $c \in [a, b]$. Enfin, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ et f continue sur $[a, b]$, on peut passer à la limite et on obtient $f(c) \leq 0 \leq f(c)$. Donc $f(c) = 0$. $\square$

L'algorithme de dichotomie permet de donner une autre démonstration du TVI.

3.5 Image d'un intervalle

On rappel :
Si $I \subset \mathbb{R}$, alors, par définition :

$$I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \iff \forall x, y \in I,\ (x \leq y \implies [x, y] \subset I)$$

Théorème 3.10 (TVI généralisé [✓]) :
L'image continue d'un intervalle est un intervalle

Démonstration :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On va montrer que $f(I)$ est un intervalle. Soit $x, y \in f(I)$ avec $x \leq y$. Donc $\exists a, b \in I$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Sans

perte de généralité, on peut supposer $a \leq b$. Si ce n'est pas le cas, il faut adapter certains segments qui suivent.

Soit $z \in [x, y] = [f(a), f(b)]$. Alors le TVI nous assure l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $z = f(c)$ puisque f est continue. Donc $z = f(c) \in f(I)$. Donc $\forall z \in [x, y]$, $z \in f(I)$. Donc $[x, y] \subset f(I)$ et donc $f(I)$ est un intervalle. $\square$

Remarque :
Ce théorème, bien qu'ici traité comme un corollaire du TVI est en réalité le vrai TVI. Et c'est le premier TVI qui est un corollaire de ce théorème. Mais ce théorème provient en fait d'un cadre beaucoup plus général qui s'appelle la topologie et qui est largement hors-programme. Dans sa version topologique, le TVI s'énonce "L'image continue d'un connexe est un connexe". Et dans $\mathbb{R}$, les connexes, sont les intervalles. Ce qui permet de démontrer ce théorème indépendamment du TVI que nous avons déjà vu, qui en devient alors une conséquence.

En d'autres termes, l'ordre des énoncés choisis dans ce cours, n'est pas celui qui devrait être si on avait tous les outils mathématiques à notre disposition. Les choses devraient être inversées. Mais, ici, nous sommes contraints de construire les choses petit à petit en démarrant d'un cas particulier (le TVI) pour finir par sa généralisation (le "vrai" TVI).

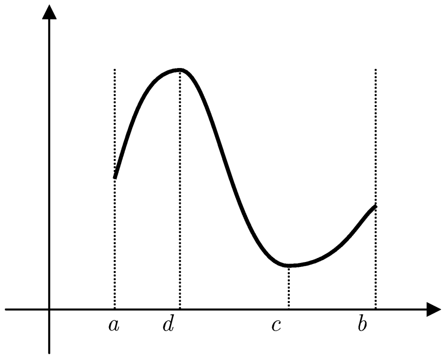
ATTENTION ! ! Ce théorème seul ne permet pas de pouvoir dire si l'image de I (qui est un intervalle) est un intervalle fermé, ouvert, semi fermé ou semi ouvert. Il faut des hypothèses supplémentaires pour ça. Par exemple, l'image du segment ouvert $]-1, 1[$ par la fonction carré est un intervalle semi-ouvert.

Exemple 3.9 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que f n'est ni majorée ni minorée. Montrer alors que f est surjective.

Théorème 3.11 (Théorème des bornes atteintes [✓]) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists c, d \in [a, b],\ f([a, b]) = [f(c), f(d)]$$



On admet ce théorème. La démonstration est parfaitement dans le programme, mais un peu longue. Ça pourrait faire l'objet d'une petite partie de sujet. Il faudrait d'abord montrer que f est bornée (ce qui se fait par l'absurde par exemple), puis montrer que les bornes sont atteintes avec le TVI notamment.

On a donc en particulier, si f continue sur $[a, b]$:

$$\inf_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$$

!!! ATTENTION !!!

Ces relations ne fonctionnes que pour des fonctions continues sur un segment (donc un intervalle fermé borné) ! Si une fonction est continue sur un intervalle qui n'est pas fermé borné, on ne peut rien dire. Tout est possible.

Contre-exemple :

- $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$ (qui n'est pas borné) mais $\arctan(\mathbb{R})$ est borné. Et $\arctan$ n'atteint pas ses bornes.
- $\tan$ est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ qui est borné, mais $\tan(]-\pi/2, \pi/2[)$ n'est pas borné.
- $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $\cos(\mathbb{R})$ est borné et $\cos$ atteint ses bornes (beaucoup de fois).

L'hypothèse de continuité n'est pas non plus nécessaire. C'est une condition suffisante pour s'assurer que f est bornée et atteint ses bornes. Si f n'est pas continue, tout est possible. Mais en pratique, c'est une condition facile à vérifier qui nous enlève beaucoup d'ennuis. Il faut donc bien prendre garde à la vérifier clairement.

Contre-exemple :
On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

En particulier, f est définie sur $[-1, 1]$ mais elle n'est pas continue sur $[-1, 1]$. Et f n'est pas bornée sur $[-1, 1]$.

Corollaire 3.12 (Théorème des bornes atteintes (reformulation)) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et f continue sur $[a, b]$. Alors

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$$

Vous avez déjà certainement dû croiser cette version du TVI dans vos petites classes. Ce corollaire n'est qu'une reformulation du théorème précédent.

Exemple 3.10 :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que f admet une limite fini quand $x \to +\infty$. Montrer alors que f est bornée mais n'atteint pas forcément ses bornes.

3.6 Fonctions continues monotones

Théorème 3.13 (Image d'un intervalle par une fonction strictement croissante) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ strictement croissante.

Alors $f(I)$ est un intervalle de même type que I dont les extrémités sont les limites de f aux bornes de I.

C'est en fait encore un corollaire du TVI.

Démonstration :
Supposons que $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Comme f est croissante, par théorème de la limite monotone, les limites de f en a et b existe et sont soit un réel, soit $\pm\infty$. On appelle $\lim_a f$ et $\lim_b f$ ces limites.

On a donc $\forall x \in]a, b[$, $\lim_a f \leq f(x) \leq \lim_b f(x)$. D'autres part, ces inégalités sont en réalité des inégalités strictes. En effet, dans le cas où ces limites sont des réels (nécessaire pour avoir une éventuelle égalité) si $\exists x \in]a, b[$ tel que $f(x) = \lim_b f$ par exemple, alors f est constante égale à $\lim_b f$ sur $[x, b[$ par croissance de f et ce qui contredit la stricte croissance de f. Donc ☠ et donc $\forall x \in]a, b[$, $\lim_a f < f(x) < \lim_b f$. Ce qui reste valable que ces limites soit finies ou infinies. Donc

$$f(]a, b[) \subset \left]\lim_a f, \lim_b f\right[$$

Inversement, soit $y \in]\lim_a f, \lim_b f[$. On va se placer dans le cas où les limites sont des réels. On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [b - \eta, b[, |f(x) - \lim_b f| \leq \varepsilon$. Plus précisément, $\forall x \in [b - \eta, b[$, $\lim_b f - \varepsilon \leq f(x) < \lim_b f$ en utilisant un petit raisonnement fait juste avant. Comme $y \in]\lim_a f, \lim_b f[$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\lim_b f - y > \varepsilon$. On a donc un $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [b - \eta, b[$, $y < \lim_b f - \varepsilon < f(x) < \lim_f$. On choisit alors $x_2 \in [b - \eta, b[\subset]a, b[$ quelconque et donc $y < f(x_2)$. On fait de même à l'autre extrémité de l'intervalle et trouve un $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(x_1) < y$.

Donc finalement, $\exists x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que $f(x_1) < y < f(x_2)$. Alors le TVI (je ne sais plus quel forme) nous donne $\exists c \in]x_1, x_2[$ tel que $y = f(c)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(f) = f(]a, b[)$. Et comme on peut faire ce raisonnement pour tout $y \in]\lim_a f, \lim_b f[$, on a donc $]\lim_a f, \lim_b f[\subset f(]a, b[)$.

D'où l'égalité recherchée $f(]a, b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$.

On pourrait réécrire ce paragraphe dans le cas où les limites sont infinies et où l'une est infinies et l'autre finies.

Dans le cas où $I = [a, b[$, alors $I =]a, b[\cup \{a\}$ et donc $f(I) = f([a, b[) = f(]a, b[) \cup f(\{a\}) = f(]a, b[) \cup \{f(a)\} =]f(a), \lim_b f[\cup \{f(a)\} = [f(a), \lim_b f[$ par continuité de f en a.

Les autres cas se traites similairement. Et les cas où une borne de I est infini n'est pas très différents. □

A strictement parlé, il y a autant de cas à traiter dans la démonstration que de possibilité pour les formes de l'intervalle.

Remarque :
Pour des fonctions strictement décroissante, on applique ce résultat à $-f$ qui est croissante.

Proposition 3.14 (Strictement monotonie implique injectivité [✓]) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est injective sur I.

Démonstration :
On va supposer que f est strictement croissante.

Soit $x, y \in I$ avec $x \neq y$. Donc forcément, on a soit $x < y$ soit $y < x$. Sans perte de généralité et quitte à renommer nos éléments, on peut supposer $x < y$. Alors, par croissance stricte de f sur I, $f(x) < f(y)$. En particulier $f(x) \neq f(y)$. Et donc f est injective.

Si f est strictement décroissante, alors $-f$ est strictement croissante et donc injective. Donc f le sera aussi. □

Lemme 3.15 :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone et bijective.

Alors f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.

Démonstration :
On va encore faire la démo seulement dans le cas où f est croissante. L'autre cas se ramenant à celui là.

On suppose donc que f est croissante et bijective de I sur $f(I)$. On a $f^{-1} : f(I) \to I$. On va montrer qu'elle est croissante. Soit $x, y \in f(I)$ avec $x < y$. Donc $\exists a, b \in I$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Alors $a \neq b$ car $x \neq y$. Mais la croissance de f impose d'avoir $a < b$ sinon, on contredit l'ordre dans lequel sont placés x et y. Mais $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. Donc $x < y$ implique $a = f^{-1}(x) < f^{-1}(y) = b$. Donc f^{-1} est bien strictement croissante. □

Théorème 3.16 (Théorème de la bijection [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ strictement monotone.

Alors :

(i) f est bijective de I sur $f(I)$

(ii) Son application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue, de même monotonie que f et les limites de f^{-1} aux extrémités de $f(I)$ sont les bornes de I

Démonstration :
On va faire la démonstration dans le cas où f est strictement croissante. Si f est strictement décroissante, il suffit alors de considérer $-f$ qui sera strictement croissante.

f est donc injective sur I par le lemme 3.14. Mais elle est également surjective sur $f(I)$ par définition de $f(I)$. Elle est donc bijective de I sur $f(I)$. Le lemme 3.15 nous dit alors que f^{-1} est strictement croissante également de I sur $f(I)$. Il y a donc juste à montrer que f^{-1} est continue.

Soit $y_0 \in f(I)$ qui n'est pas extrémité droite (donc $y_0 \neq \sup f(I)$). f^{-1} étant croissante, elle admet donc une limite finie à droite en y_0, c'est à dire que $\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$ existe et est dans $\mathbb{R}$. On a $f(f^{-1}(y)) = y \xrightarrow[y \to y_0]{} y_0$. Mais aussi $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \lim_{y_0^+} f^{-1}$ et la continuité de f et le théorème de limite pour les composée de fonctions 1.14 nous donne alors

$$f(f^{-1}(y)) \xrightarrow[y \to y_0^+]{} f(\lim_{y_0^+} f^{-1})$$

L'unicité de la limite donne alors

$$f(\lim_{y_0^+} f^{-1}) = y_0$$

et donc, en composant par la bijection réciproque, $\lim_{y_0^+} f^{-1} = f^{-1}(y_0)$.

Donc f^{-1} est continue à droite en tout point de $f(I)$ qui ne soit la borne supérieure de $f(I)$.

De même f^{-1} est continue à gauche en tout point de $f(I)$ qui ne soit pas la borne inf de $f(I)$. Donc f^{-1} est continue sur $f(I)$. $\square$

Remarque :
On rappelle que $\mathrm{Gr}(f)$ et $\mathrm{Gr}(f^{-1})$ sont symétrique par rapport à la première diagonale $\mathrm{Gr}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$.

Remarque :
On pourrait avoir l'impression que, dès qu'une fonction est continue et bijective, sa réciproque l'est aussi. C'est faux en toute généralité. Même en se restreignant au cas des fonctions d'une variable réelle. Il est vitale ici d'avoir la continuité sur un intervalle. Si f est continue et injective sur un ensemble qui n'est pas un intervalle, le théorème ne s'applique pas du tout. On peut trouver des contre-exemples (pathologique).

C'est d'ailleurs l'un des problèmes majeurs des topologues. Il faut travailler beaucoup plus pour pouvoir conserver la continuité en passant à la réciproque.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Toutes les hypothèses sont nécessaires ! Si I n'est pas un intervalle, ça ne fonctionne plus. Il existe des applications continue de A dans B bijective, avec A et B des sous-parties de $\mathbb{R}$ et dont la réciproque n'est continue en aucune point de B. De même, la continuité sur tous l'intervalle I est indispensable : il existe des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue seulement en 0 dont la réciproque n'est pas continue en $f(0)$.

Exemple 3.11 :
On considère $f : x \mapsto \arctan(x) + e^x$. Montrer que f^{-1} existe et que $f^{-1} \in \mathcal{C}(]-\pi/2, +\infty[, \mathbb{R})$.

Exemple 3.12 :
Montrer que $\exists! x > 0$, $\ln(x) = -e^x$.

Corollaire 3.17 (Les injections continues sont strictement monotones) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est continue et injective alors f est strictement monotone.

Démonstration :
I n'étant pas vide ni réduit à un point, on sait qu'il existe $a, b \in I$ avc $a < b$. L'injectivité de f nous assure $f(a) \neq f(b)$.

Supposons $f(a) < f(b)$. On va montrer que f est alors strictement croissante par l'absurde. Soit $x, y \in I$ tel que $x < y$. On suppose donc $f(x) \geq f(y)$. On pose $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f((1-t)b+ty) - f((1-t)a+tx)$. Alors $\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0$ et $\varphi(1) = f(y) - f(x) \leq 0$. D'autre part, on sait que φ est continue par opération sur les fonctions continues. Donc le TVI appliqué à φ nous donne $\exists c \in]0, 1]$ tel que $\varphi(c) = 0$. On pose $u = (1-c)b+cy$ et $v = (1-c)a+cx$. Alors $u, v \in [a, b]$ et $\varphi(c) = 0$ donne $f(u) = f(v)$. Mais f étant injective, on obtient $u = v$.

Mais également, $u = v \iff (1-c)(b-a) = c(x-y)$. Or $c(x-y) < 0$ et $(1-c)(b-a) \geq 0$. Donc ☠.

Finalement, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$. Donc f est strictement croissante.

On procède de la même manière avec $-f$ si $f(a) > f(b)$. $\square$

Remarque :
Ce théorème est en quelque sorte, une réciproque partielle au théorème de la bijection.

!!! ATTENTION !!!

Attention, toutes les hypothèses sont vitales ! Une fonction injective n'est pas forcément monotone (et pire, une fonction bijective n'est pas forcément monotone). Et une fonction continue n'a aucune raison d'être monotone (et heureusement, sinon on s'ennuierait beaucoup).

Contre-exemple :

- La fonction $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})$ est une bijection non continue non monotone.
- La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non injective et non monotone (on en a déjà parlé plusieurs fois).

4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Le principe est le même que l'extension aux suites à valeurs complexes. Tout se passe essentiellement de la même manière, l'extension est assez directe et marche bien tant qu'on a pas besoin de relations d'ordre. Tous les résultats de la partie précédente peuvent être étendus tant qu'ils n'utilisent pas la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ (ou que l'on peut s'en défaire).

Définition 4.1 (Limite en a) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $a \in \overline{I}$. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

On dira que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Sinon, on dira que f diverge en a.

Attention, il n'y a pas de limite infinie pour des fonctions à valeurs complexes. Ça n'a plus de sens.

Définition 4.2 (Continuité d'une fonction à valeurs complexes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$

- On dit que f est continue en a si $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

- On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

Remarque :
Comme les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, il y a aussi une notion de continuité à gauche et de continuité à droite.

Proposition 4.1 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $a \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f admet une limite finie et a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration :
C'est l'inégalité triangulaire.
On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall t \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a $|f(t) - \ell| \leq \varepsilon$. Donc $\forall t \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, $|f(t)| \leq \varepsilon + |\ell|$. Donc $f|_{I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ est bornée par $\varepsilon + |\ell|$. Donc f est bornée au voisinage de a. □

Définition 4.3 (Fonctions partie réelle et partie imaginaire) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{C}$.
On définit alors les fonctions partie réelle de f, notée $\mathfrak{Re}(f)$, et fonction partie imaginaire de f, notée $\mathfrak{Im}(f)$, par :

$$\mathfrak{Re}(f) \ : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathfrak{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(f) \ : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathfrak{Im}(f(x)) \end{array}$$

Les fonctions parties réelles et parties imaginaires sont donc des fonctions à valeurs réelles.

Théorème 4.2 (Caractérisation de la continuité pour une fonction complexe par les fonctions partie réelle et partie imaginaire [✓]) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.
Alors

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Démonstration :
Cela vient de la définition de la convergence dans $\mathbb{C}$ avec les inégalités $|\mathfrak{Re}(z)|, |\mathfrak{Im}((z)| \leq |z| \leq$

$|\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)|$. □

Proposition 4.3 (Opérations sur les fonctions continues à valeurs complexes) :
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors

1. $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. $fg \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$.
3. $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues
4. Si g ne s'annule pas sur I, alors $1/g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$.

Démonstration :
exercice □

Bien entendu, on aurait pu faire une version avant pour les limites, puis une pour la continuité ponctuelle et enfin ce résultat. Ça aurait été mieux. Mais bon...

Exemple 4.1 :
La fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

!!! ATTENTION !!!

⚠ Il n'y a pas de TVI pour les fonctions à valeurs complexes. La notion de valeurs intermédiaires dépend complètement de la notion de relation d'ordre. Pour être intermédiaire, il faut être entre des choses donc plus petits et plus grand. Donc il faut une relation d'ordre. Mais il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$, pas de notion de valeurs intermédiaires, donc pas de TVI.

Par exemple, la fonction $f(t) = e^{it}$ prend la valeur 1 et -1 mais ne s'annule pourtant jamais.

Théorème 4.4 (Théorème des bornes atteintes) :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$.
Alors f est bornée.

Démonstration :
La fonction $t \mapsto |f(t)|$ est continue sur $[a,b]$ donc bornée donc f l'est aussi. □

5 Autres types de continuité

On pourrait dire encore beaucoup d'autres choses sur la continuité. On pourrait parler de fonction contractantes ou plus généralement de fonction Lipschitzienne qui sont très utiles pour la notion de continuité (on parlera de fonction Lipschitzienne dans le prochain chapitre sur la dérivabilité). Il existe en fait un autre type de continuité : la continuité uniforme. La continuité uniforme sera revue un peu plus en détail dans le chapitre sur l'intégration.

Définition 5.1 (Continuité uniforme) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ \Big(|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\Big)$$

La notion de continuité uniforme n'est pas une notion locale alors que la continuité tout court, oui. Dans la continuité, le $\eta > 0$ à trouver dépende du point où l'on regarde la continuité. Alors que dans la continuité uniforme, non. Le $\eta > 0$ qui découle du choix de $\varepsilon > 0$ est le même pour tous les points de l'intervalle. Le choix de η est uniforme sur l'intervalle en entier. D'où le terme de continuité uniforme. Le contrôle que l'on a sur la variable pour avoir la continuité est uniforme sur l'intervalle.

Exemple 5.1 :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \varepsilon^2$. Alors, si $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $x \leq y$, alors $x \leq y \leq y + 2\sqrt{x(y-x)} = (\sqrt{x} + \sqrt{y-x})^2$. Donc $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y-x}$ par croissance. D'où $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{y-x}$. Donc si $|x-y| \leq \varepsilon^2$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$.
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, si $\eta > 0$, on pose $x = \eta + 1/\eta$ et $y = 1/\eta$, alors $|x-y| = \eta$ et $|x^2 - y^2| = \eta^2 + 2 > 2$.

Définition 5.2 (Fonction Lipschitzienne) :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $k \geq 0$ (ou k-Lipschitzienne) sur I si

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Une fonction k-contractante est une fonction k-Lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

Proposition 5.1 :
Toutes fonctions Lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 5.2 :

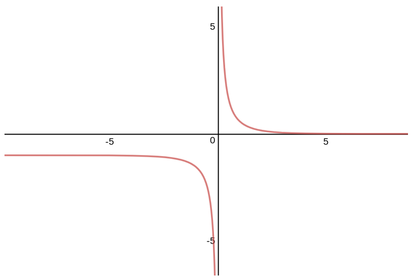
$$\text{Continuité uniforme} \implies \text{Continuité}$$

L'uniforme continuité est donc plus forte que la continuité simple. C'est plus dur d'être uniformément continue que simplement continue. Car il faut avoir la même qualité de continuité sur tout l'intervalle entier.

En fait :

Théorème 5.3 (Théorème de Heine) :
Toute fonction (réelle ou complexe) continue sur un segment y est uniformément continue.

Sur les segments, tout se passe assez bien. En effet, d'après le théorème de bornes atteintes, la fonction est bornée et on va pouvoir la maîtriser suffisamment. Donc sur un segment, tout va bien. Mais des qu'une borne de l'intervalle est ouvert, les ennuis commence. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.



La notion d'uniforme continuité et particulièrement le dernier théorème est utile pour définir comme il faut la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un segment.