NOM :
Prénom :

Mardi 19 Décembre 2023

Interrogation 12

Dimensions Finies

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème de la base incomplète.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

2. Caractérisation des bases en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E $\iff$ $\mathcal{B}$ est libre $\iff$ $\mathcal{B}$ engendre E.

3. Définition du rang d'une famille de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On définie le rang de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$, noté $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n)$ par $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim(\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n))$.

4. Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, soit F, G deux sev de E tels que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Alors $E = F \oplus G \iff E = F + G \iff F \cap G = \{0\}$.

5. Formule de Grassmann.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F, G deux sev de E. Alors

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

6. Caractérisation de la liberté par le rang.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{rg}(x_1, \ldots, x_n) \leq n$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre $\iff \text{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n$.

7. Principe d'extension d'une famille libre.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ une famille de vecteurs de E telle que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre. Alors $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est libre $\iff$ $x_{n+1} \notin \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

8. Définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteur commun à toutes les bases de E.

Exercice 2 :
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + t = y - t = 0\}$. Montrer que E est sev de $\mathbb{R}^4$ et donner la dimension de E.

On a

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + t = y - t = 0\} \\ &= \{(-2y, y, z, y),\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((2, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)). \end{aligned}$$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^4$.

On pose $e_1 = (2, -1, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 0, 1, 0)$. Alors (e_1, e_2) engendre E. Vérifions l'indépendance linéaire : soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 &\iff (2\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1) = 0 \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la définition de l'égalité dans un produit cartésien.

Donc la famille (e_1, e_2) est une famille libre. Donc, par définition, (e_1, e_2) est une base de E.

Donc, par définition de la dimension, $\dim(E) = 2$.