



Chapitre 12 - TD : Limites, Continuité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

25 décembre 2023

1 Limites et Continuité

Exercice 1 (Bac S Amérique du Nord 2000) :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Partie A

- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
- Montrer que f est continue en 0. Pour $x > 0$, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
- Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ et étudier la continuité de f' en 0.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f .

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

- Montrer que dans $]0, +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
- Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α .
- On pose $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$. Montrer que $A = f'(\alpha)$.
- Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a . Montrer que T_α a pour équation $y = Ax$. Tracer T_α , puis la courbe $\mathcal{C}$.
- Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.

Exercice 2 (Bac Maroc 2021) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln(x) - 2x$ si $x > 0$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Montrer que f est continue à droite en 0.
- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement ce résultat.

- (b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
- (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
- (b) Dessiner la courbe $\mathcal{C}$.
5. (a) Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) En déduire que $\forall x > 0, \ln(x) \geq x - \frac{1}{x}$.
6. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
- (a) Montrer que la fonction g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
- (b) Construire la courbe représentative de g^{-1} sur le même graphe que $\mathcal{C}$.
7. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x \leq 0 \\ 2x \ln(x) - 2x & x > 0 \end{cases}$$

- (a) Étudier la continuité de h en 0.
- (b) Étudier la dérivabilité de h à gauche en 0 et interpréter ce résultat.
- (c) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3 :

Deux étudiants révisent leur cours de SI d'électricité. Ils se souviennent $E(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$. Eugénie assure : "l'énergie E étant continue, l'intensité i doit également être continue". Mathis n'est pas convaincu. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4 (Étude de fonctions) :

Dans cet exercice – et seulement celui là –, on pourra utiliser la dérivabilité. Le but de cet exercice étant de faire des rappels sur les études globales de fonctions.

Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \arccos(\sqrt{\ln(x)})$
2. $g : x \mapsto \ln(\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1)$
3. $h : x \mapsto \sqrt{(x+1)e^{-x} + x + 1}$
4. $k : x \mapsto \sqrt{\cos(x)^2 - \cos(x) + e^{\cos(x)}}$

Exercice 5 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\arccos x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) \tan(2x)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lfloor x \rfloor} - 1}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 6 :

Soit $a, b > 0$. Montrer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0.$$

Exercice 7 :

Soit $a > 1$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ croissante telle que $\frac{f(ax)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

1. Montrer que $\forall b > 0, \frac{f(bx)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
2. Donner un exemple d'une telle fonction non constante.

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x/2)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

1. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta], \forall n \in \mathbb{N}, (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{x}{2^n}} \leq f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \leq (1 + \varepsilon) \sqrt{\frac{x}{2^n}}.$$

2. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$.

1. Montrer que $\frac{f(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.
2. [Bonus] Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$.

Exercice 10 :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique convergente en $+\infty$. Montrer que g est constante.

Exercice 11 (Réciproque partielle du TVI) :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

Exercice 12 (*) :**

Soit la fonction f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrer que $(u_n(x))_{n < [x]}$ est croissante et $(u_n(x))_{n \geq [x]}$ est décroissante.
3. En déduire que $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{x^{[x]}}{[x]!}$.
4. Montrer que f est continue.

Exercice 13 :

Étudier la continuité de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x] + (x - [x])^2 \end{array}$$

Exercice 14 :

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x \lfloor 1/x \rfloor & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 ([✓]) :

Montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est totalement discontinue sur $\mathbb{R}$, i.e. qu'elle est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 16 (Centrale MP 2000) :

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, f(xf(y)) = yf(x)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

1. Montrer que f est une involution, i.e. $f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$.
2. Montrer que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Que peut-on en déduire que la monotonie de f ? Sur la continuité?
3. Déterminer f .

Exercice 17 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{f(x)}{|x|} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists A(\alpha) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq A(\alpha) \implies f(x) - |\alpha x| \geq |x|$.
2. En déduire que $\forall \alpha > 0, f(x) - \alpha x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 18 :

Soit $f \in \mathcal{F}([0, 1], [0, 1])$ définie par

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[0, 1]$
2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 19 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue 1-périodique et $\sqrt{2}$ -périodique.

1. Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. En déduire que f est constante.

Exercice 20 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$, montrer que cette suite est croissante si $x \leq 1$ et décroissante si $x \geq 1$.
2. Dans les deux cas en déduire que la suite est convergente et donner sa limite.

3. Montrer que f est constante.

Exercice 21 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et 1 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$.

1. Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, f(x^{2^n}) = f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$.
2. Montrer que f est constante sur $[0, 1[$ et sur $[1, +\infty[$. En déduire que $f|_{\mathbb{R}_+}$ est constante.
3. Montrer finalement que f est constante sur $\mathbb{R}$.

2 Prolongements

Exercice 22 (Prolongements explicites [✓]) :

Donner le domaine de définition suivantes et étudier leur continuité sur leur domaine respectifs (en particulier leur prolongement éventuel) :

1. $f_1 : x \mapsto \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}\right)$.
2. $f_2 : x \mapsto (1 - \ln(x)) \ln(x - e)$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 1}$
4. $f_4 : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\sin(2\pi x)}$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$

Exercice 23 ([✓]) :

Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

peut être prolongée par continuité en une fonction continue sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 24 :

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{1/x + \sin(1/x)}$$

Montrer que f est prolongeable en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 ([✓]) :

On considère l'équation différentielle

$$ty' + y = e^t$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Déterminer les solutions qui sont continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\infty$.

Montrer que f admet une borne supérieure et qu'elle est atteinte.

Exercice 27 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = 1$. On suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f(x) = \sin(x) f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

2. Montrer que l'on peut étendre la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ par continuité en une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$.
 3. En déduire que $f = \varphi$.

3 TVI and co.**Exercice 28 (Théorème du pt fixe ([✓])) :**

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ telle que $f \circ g = g \circ f$. Soit F l'ensemble des points fixes de f .

2. Montrer que F admet un plus grand et un plus petit élément.
 3. Montrer que F est stable par g .
 4. Montrer que $\exists x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 29 ([✓]) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.

Montrer que $\exists x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$.

Exercice 30 (* [✓]) :

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, à l'aide d'une fonction auxiliaire judicieusement choisie.

Exercice 31 :

Montrer que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 32 :

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f est bornée et g continue.

Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 33 ([✓]) :

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x)$$

Montrer $\exists \alpha > 0, \forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha$

Exercice 34 ([✓]) :

Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ (sans utiliser la dérivation, évidemment).
2. Déterminer, pour $y \in] -1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de f .

Exercice 35 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire qu'elle est strictement croissante.
3. Montrer par l'absurde, que $\forall x \geq 0, f(x) \geq x$.
4. De même montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \leq x$.
5. Conclure.

Exercice 36 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. En remarquant que

$$\forall n \geq 1, f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right),$$

montrer que $\forall n \geq 2, \exists x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

Exercice 37 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [a, b], |f(x)| < 1$.

1. Montrer que $\exists k \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq k$.
2. Soit $(x_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$. Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)^n$.

Exercice 38 (Endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ continus [✓]) :

Le but de cet exercice est de déterminer les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ continus.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un endomorphisme de groupe continue en 0, c'est-à-dire une application continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$.
3. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$.
4. En déduire une expression de f et conclure.

Exercice 39 (*) :**

Quelles sont les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$