DM 5
Algèbre Linéaire

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

Pour le Mardi 09 Janvier 2024

Problème 1 (Sev de $\mathbb{R}^4$) :
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuelle.

1. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1, v_2, v_3) où
$$v_1 = (1, 3, -1, 0), \qquad v_2 = (5, 4, -2, 1), \qquad v_3 = (-13, 5, 1, -4).$$
   (a) Montrer que la famille (v_1, v_2) est une famille libre.
   (b) Montrer que v_3 peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2.
   (c) En déduire une base de F.
2. On considère le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (u_1, u_2) où
$$u_1 = (1, 3, 0, 0), \qquad u_2 = (6, 7, -3, 2).$$
   (a) Montrer que (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Que peut-on dire de la somme $F + G$?
   (c) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de x, pour que $x \in G$.
3. Soit H le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par
$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 3x_1 - x_2 + 7x_4 = x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0\right\}$$
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base de H.
   (c) Montrer que $v_1 \in H$ et $v_2 \notin H$. En déduire une base de $F \cap H$.

Problème 2 (Itérées d'une application linéaire $2f^2 = f + \mathrm{Id}_E$) :
Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tous le problème, on considère un endomorphisme f de E vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E)$$

1. On suppose ici que $f = \alpha \mathrm{Id}_E$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de α possible.
2. On revient au cas général.
   (a) Montrer que f est bijectif et exprimer simplement f^{-1}.
   (b) Justifier que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (c) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$
   (d) Calculer $(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E)$ et en déduire que $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
   (e) De même, justifier que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
3. On suppose désormais que les endomorphisme f et Id_E sont linéairement indépendants.
   (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaison linéaire de f et Id_E
   (b) Établir que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f^p = a_p f + b_p \mathrm{Id}_E$.
   (c) Déterminer a_0, a_1, b_0, b_1 et exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (d) Donner une relation de récurrence entre a_{p+2}, a_{p+1} et a_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire les expressions de a_p et b_p en fonction de $p \in \mathbb{N}$. Vérifier que les suites (a_p) et (b_p) sont convergentes de limite $2/3$ et $1/3$ respectivement.
   (e) On pose $q = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$. Montrer que q est le projecteur sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E)$.
4. On pose $\mathcal{M} = \{\lambda f + \mu \mathrm{Id}_E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $\forall g, h \in \mathcal{M}$, $g \circ h \in \mathcal{M}$ et $g \circ h = h \circ g$ (on dit que $(\mathcal{M}, +, \cdot, \circ)$ est algèbre commutative).
   (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{M}$ (en tant que $\mathbb{R}$-ev, bien sûr).

Problème 3 (Suite implicite [À NE PAS FAIRE]) :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$x - \ln(x) = n \qquad (E_n)$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$, $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

Partie I : Étude de f_n

1. Étudier rapidement les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les solutions, si elles existent, de (E_0) et (E_1).

Partie II : Une première suite

3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, (E_n) admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ pour tout $n \geq 2$ et en déduire les variations de $(x_n)_{n\geq 2}$.
5. Justifier que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge. On notera ℓ sa limite. Donner un encadrement de ℓ.
6. Quelle est la valeur de ℓ ?

7. Montrer $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.
8. Montrer qu'on a le développement asymptotique à deux termes :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n}).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} x_k$.
   (a) Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Justifier que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}$.
   (c) En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$.

Problème 4 (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ (*BONUX*)) :
Le but de ce problème est d'établir la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie respective n et p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de F.

1. On considère la base duale $\mathcal{B}^*$ associée à $\mathcal{B}$. Montrer que $\mathcal{B}^*$ forme une base de E^*.
2. Montre que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, p\}$, $e_i^*\varepsilon_j$ définie bien un vecteur de $\mathcal{L}(E,F)$.
3. Montrer que la famille $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{L}(E,F)$.
4. Montrer que $(e_i^*\varepsilon_j)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E,F)$.
5. En déduire que $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et donner sa dimension.