Chapitre 13 - TD :

Dérivabilité
Indications

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

16 janvier 2024

1 Généralités

Exercice	Indications
1	g étant défini par morceaux, le seul problème est au point de recollement. Et on a une caractérisation de tout ce qu'il faut par les propriétés à gauche et à droite.
2	La notion de dérivabilité est une notion ponctuelle. Il faut donc revenir aux sources. Au commencement.
3	Attention à l'expression des différentes fonctions. Attention aussi aux éventuels points problématiques, à étudier séparément.
4	Ce sont des compositions. On a un théorème pour ça.
5	Tout est un problème de définitions. Il suffit d'écrire avec précaution.
6	Il suffit de changer la forme de l'expression pour se ramener à quelque chose à qu'on connaît.
7	f_1 : c'est un produit. On a un théorème pour les dérivées n-ème de produit. Il faudra peut-être une récurrence pour calculer les dérivées de chaque fonctions du produit. f_2 : Toujours un produit. Attention, il y a peut-être une récurrence pour les dérivées n-ème de chaque fonction. f_3 : Idem. Produit et récurrence. f_4 : Pas de produit ici. Mais récurrence pour avoir une expression sympathique de la dérivées n-ème. f_5 : Idem. Ça ressemble à la précédente. Mais il y a une différence quelque part. f_6 : Commencer par changer l'expression pour ne plus avoir de produits. Puis calculer la dérivée n-ème de $\cos$. Il y a une expression sympathique pour ça. Avec une récurrence, évidemment. Il suffit de bien connaître le trigo.
8	Il y a un théorème pour justifier de la dérivabilité des réciproques. C'est le bon moment pour l'utiliser. Attention, il y a des problèmes de recollement.
9	Idem. Mais sans problème de recollement. Et il y a un théorème de dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective. Inutile de connaître l'expression de la réciproque, pour ça. Mais on a pas l'expression de la dérivée. C'est un théorème d'existence aussi.

2 Rolle, TAF and co.

Exercice	Indications
10	Rolle sur une bonne fonction auxiliaire judicieusement choisie.
11	Il y a un théorème qui permet d'avoir une égalité entre la dérivée et la fonction (deux en fait, mais qui sont équivalents). Il suffit d'utiliser une bonne fonction auxiliaire.
12	Voir suite récurrentes d'ordre 1. Tout dépend de l'étude de la fonction définissant la suite. Mais on a maintenant des outils supplémentaires pour faire des études de fonctions permettant d'aller plus vite. En particulier, voir l'exo 2 sur les suites.
13	1 Absurde. 2 L'indication est dans la question. 3 Réutiliser la démo du théorème satanique 4 Appliquer la question précédente sur des fonctions bien choisies. 5 On peut réutiliser la question 1
14	C'est le TAF mais il faut prendre des précautions. On ne peut pas l'appliquer sur f directement. Ce serait trop brutal. Il faut utiliser une bonne fonction auxiliaire. Comme souvent.
15	Il y a déjà une indication. Le but étant que la dérivée de la fonction auxiliaire fasse intervenir f et f''. Avec l'exponentielle, c'est faisable.
16	Utiliser Rolle pour la 1. Attention, il y a des soucis en 0 pour pouvoir appliquer Rolle. Pour la 2, le problème, c'est le français. Il suffit d'écrire en maths pour que ça devienne facile.
17	Satan, bonjour. Pour la 3, reprendre la démo du théorème satanique.
18	Satan. On a montré que g est dérivable par des théorèmes. Et si on compare avec la définition ? Ça donne quoi ?
19	Il faut se ramener à Rolle. Le plus simple étant d'utiliser une fonction auxiliaire. N'y aurait-il pas un moyen de composer par une application qui ramènerait $[a, +\infty[$ en un intervalle bornée ? Et ensuite, éventuellement, étendre un peu ? La 2 se fait sur le même principe.

3 Classes

Exercice	Indications
20	C'est un problème d'extension. Il y a des théorèmes pour ça. Attention aux détails, notamment aux définitions.
21	Évidemment, le problème c'est le recollement. C'est donc un problème ponctuel.
22	Trouver g n'est pas très compliqué. Ce qui est plus délicat, c'est montrer que ça marche. Et là, il y a des problèmes de bords. Mais on a des théorème pour ça. Et assez peu, en fait. Les choix devraient être limités.

4 Convexité

Exercice	Indications
23	Il y a des puissances. Il n'y aurait pas un autre façon d'écrire des puissances ? Et après ça, que voit-on apparaître ?

24	Montrer que $\sin$ est concave sur l'intervalle. Or on a un encadrement géométrique des fonctions concaves. Et hop. Même idée pour la question 2.
25	Il faut réussir à appliquer la 1 pour avoir la 2. Et pour ça, il faut bien choisir les éléments sur lesquelles appliqués la convexité de f. En particulier, il faut bien choisir les éléments pour que la somme de la convexité se transforme en produit. Pour la 3, il faut appliquer la 2. Là aussi, il faut bien choisir les éléments. Mais on peut passer de la 2 à la 3 facilement.
26	Absurde. Et utiliser la croissance des taux de variations pour pouvoir utiliser les gendarmes sur les branches infinies.
27	Reformuler un peu. Si $p+q=1$, on peut donc tout écrire avec un seul paramètre au lieu de 2. L'exercice devrait vous faire penser à un autre déjà fait.
28	1 Il doit y avoir de la convexité. C'est le but. Donc il faut des sommes au lieu de produit. Donc il devrait y avoir de log quelque part. 2 Il "suffit" d'utiliser la 1 en choisissant bien a et b. Prendre $a = \frac{x_k^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p}$ et $b = \frac{y_k^p}{\sum_{i=1}^n y_i^p}$. Puis faire des sommes. 3 C'est le même genre d'idée. Utiliser le fait que $(x_i+y_i)^p = x_i(x_i+y_i)^{p-1} + y_i(x_i+y_i)^p$, puis utiliser la 2 sur les deux sommes qui apparaissent. Avec un peu de transformations entre temps.
29	Il suffit d'écrire en commençant par le bon point de départ.

5 Exos plus complets

Exercice	Indications
30	C'est un exercice sur les équa diff. En regardant les derniers du TD sur les équa diff, vous devriez avoir des idées.
31	Les indications sont données. φ est réelle. Et on sait comment se manipule les dérivées des fonctions complexes. Pour le reste, il faut faire attention aux manipulations. Ce sont des complexes.
32	1 Il faut modifier la forme de l'expression de gauche pour pouvoir utiliser l'inégalité vérifiée par f. 2 Utiliser le TAF deux fois sur l'expression de gauche. Attention en l'appliquant. Il y a des précautions à prendre. 3 Passage à la limite dans les inégalités et le tour est joué. Attention quand même, il faut pouvoir passer à la limite. Donc des précautions sont à prendre.
34	1 C'est indiqué. Il faut "juste" choisir la bonne fonction sur laquelle appliquer le TAF. 2 Penser à la démo de la caractérisation de la partie entière. C'est le même genre de manipulation. 3 On somme. Attention aux quantificateurs. 4 Définition d'un équivalent ?

35	1	C'est facile. C'est dans le cours.
	2	Montrer qu'elles sont dérivables et déterminer les dérivées.
	3	Les indications sont données.
	4a	Il y a un théorème pour ça.
	4b	Bornée sur un segment. Il y a un théorème aussi.
	4c	Commencer par montrer que $\lvert f(x)-f(y)\rvert \leq \lvert y-x\rvert(\lvert\ln(y)\rvert+1)$ en utilisant l'indication. Et terminer.
	5	Reprendre la question précédente. Attention aux positions relatives de x et y. Utiliser la 4b. Conclure.