



Chapitre 13 - TD : Dérivabilité

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

16 janvier 2024

1 Généralités

Exercice 1 ([✓]) :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On définit la fonction

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ f(2x - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

À quelle(s) condition(s) la fonction g est-elle continue ? Dérivable ?

Exercice 2 :

Étudier les fonctions suivantes au point indiqué :

- $f_1(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, en 0.
- $f_2(x) = x^2 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$, en 0.
- $f_3(x) = \begin{cases} 1 - e^x & x < 0 \\ 0 & x = 0, \text{ en } 0. \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & x > 0 \end{cases}$
- $f_4(x) = \frac{|x|}{(1 + |1 - x^2|)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, en 0 et en ± 1 .

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir donné leur ensemble de dérivabilité :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2} \quad f_2 : x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2+1} \quad f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos(x)+2)^4}$$
$$f_4 : x \mapsto x^x \quad f_5 : x \mapsto (\operatorname{ch} x)^x \quad f_6 : x \mapsto \ln |x|$$

Exercice 4 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \arctan(e^x), \quad f_2(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)), \quad f_3(x) = \arctan(\operatorname{th}(x/2))$$

Donner alors des relations entre f_1 , f_2 et f_3 .

Exercice 5 :

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions

$$f_\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{array}$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.
3. Étudier les extremums de la fonction f_λ .
4. (bonus) Déterminer les coordonnées du maximum et minimum de f_λ . Trouver alors une fonction g telle que $(x, g(x))$ correspondent au maximum de f si $x \geq 0$ et $(x, g(x))$ soit le minimum de f_λ si $x \leq 0$.

Exercice 6 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Étudier

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Exercice 7 :

Calculer les dérivées n -ème des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto x^2(1+x)^n \quad f_2 : x \mapsto (x^2+1)e^x \quad f_3 : x \mapsto (2x^2-x-2)\ln(x)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{1-x} \quad f_5 : x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad f_6 : x \mapsto \cos(x)^3$$

Exercice 8 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x|x| \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$$

Montrer que ces fonctions sont bijectives sur \mathbb{R} . Calculer leur inverses et montrer ensuite que leurs inverses sont dérivable et calculer leurs dérivées.

Exercice 9 :

Soit

$$f : \begin{array}{l} [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\sin(x)} + x \end{array}$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser. Montrer alors que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

2 Rolle, TAF and co.**Exercice 10 :**

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 12 ([✓]) :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 4/3]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Exercice 13 (Règle de L'Hôpital [✓]) :

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que

$$\forall x \in [a, b], g'(x) \neq 0$$

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$
2. Montrer $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

à l'aide d'une bonne fonction auxiliaire et du théorème de Rolle.

3. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$.
4. En déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}.$$

5. (Bonus) On suppose en plus que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq g'(x)$. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Exercice 14 ([✓]) :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2([a, a + 2h], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\exists c \in]a, a + 2h[, f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice 15 :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$f(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad f(b) = f'(b)$$

Montrer que

$$\exists c \in]a, b[, f(c) = f''(c)$$

Indic : Introduire une fonction auxiliaire dépendant de $f(x)$, $f'(x)$ et e^x .

Exercice 16 ([✓]) :

Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire l'existence d'un autre point que l'origine en lequel la tangente au graphe de f passe par l'origine.

Exercice 17 ([✓]) :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Montrer qu'on peut étendre f en une fonction définie sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+^* .
3. À l'aide du TAF appliqué entre x et $x+1$, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{1/x} \right)$$

Exercice 18 (>:-) [✓] :

Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell' \in \mathbb{R}.$$

1. On introduit la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$. Étudier la dérivabilité de g .
2. que peut-on en déduire sur ℓ' ?

Exercice 19 (Généralisations du théorème de Rolle ()) :**

On présente ici deux généralisations du théorème de Rolle. On peut en faire d'autres.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\exists c \in \mathbb{R}, f'(c) = 0$.

3 Classes**Exercice 20 :**

Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \ln(x) \end{array}$$

peut être étendue en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 21 ([✓]) :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} .

Exercice 22 ([✓]) :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$$

4 Convexité

Exercice 23 :

Montrer que $\forall a, b > 0, \forall t \in [0, 1]$,

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b.$$

Exercice 24 :

Avec des arguments de convexités, établir facilement les inégalités suivantes :

- $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

Exercice 25 :

On considère $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

- Montrer que f est convexe sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{1/n}.$$

- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$,

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n y_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (x_k + y_k) \right)^{1/n}.$$

Exercice 26 (*) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe bornée.

Montrer que f est constante.

Exercice 27 :

Soit $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $p + q = 1$. Montrer

$$\forall x, y \geq 0, 1 + x^p y^q \leq (1+x)^p (1+y)^q.$$

Exercice 28 (Inégalités Young, Hölder et Minkowski (**)) [✓] :

Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- Montrer l'inégalité de Young :

$$\forall a, b > 0, ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

- Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0, \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}.$$

- Montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0, \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}.$$

Exercice 29 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement décroissante et convexe.

Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

5 Exos plus complets**Exercice 30 ([✓]) :**

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(i.e. on détermine les endomorphismes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dérivable en 0).

Exercice 31 :

On se propose de prouver l'IAF pour les fonctions à valeurs complexes.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) \cap \mathcal{D}^1(]a, b[, \mathbb{C})$. On suppose $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$. On introduit

$$\varphi : \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \Re \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \overline{f(x)} \right) \end{array}$$

Montrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe en utilisant l'IAF sur φ .

Exercice 32 () :**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$. On va montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f''(x) \leq f'(x)^2.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \neq 0, \frac{f(x)f(x+2h) - 2f(x)f(x+h) + f(x)^2}{h^2} \leq \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)^2.$$

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \neq 0, \exists e_h \in]-h, 0[\cup]0, h[$,

$$\frac{f(x)f(x+2h) - 2f(x)f(x+h) + f(x)^2}{h^2} = f(x)f''(x + e_h).$$

3. Conclure.

Exercice 33 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers a telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

1. On suppose dans cette question $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < a < y_n$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est dans le segment défini par $\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}$ et $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}$.

(b) En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. On suppose dans cette question qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < a < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^1(] \alpha, \beta [, \mathbb{R})$.

Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On pose $\forall \alpha > 1$,

$$f_\alpha : x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- Montrer que $\forall \alpha > 1$, $f_\alpha \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et déterminer $f'_\alpha(0)$.
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$. Donner une expression de la suite (u_n) associée en fonction de n et α .
- Étudier la limite de (u_n) en fonction de α .
- Conclure sur le cas général.

Exercice 34 ([✓]) :

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $\forall n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

1. À l'aide de l'IAF, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$$

- En déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour tout $k \geq 2$.
- En déduire un encadrement de u_n puis un équivalent de u_n .
- Application : Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 35 :

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|y - x|^\alpha$$

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que f est höldérienne d'exposant 1.
- Démontrer que les fonctions höldérienne d'exposants > 1 sont constantes.
- On considère $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $]0, 1]$. Montrer par l'absurde que f n'est pas höldérienne d'exposant 1 en utilisant l'IAF et en introduisant $y = 2x$.
- Soit $\alpha \in]0, 1[$.
 - Montrer que la fonction $y \mapsto y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$ est prolongeable par continuité en 0.
 - En déduire que $y \mapsto y^{1-\alpha}(1 + |\ln y|)$ est bornée sur $[0, 1]$ une fois prolongée.
 - Montrer que $\forall x, y \in]0, 1]$ avec $x < y$,

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|x - y|^\alpha} \leq y^{1-\alpha}(1 + |\ln(y)|)$$

Indic : On utilisera $\ln(1 + u) \leq u$ pour $u \geq 0$.

- En déduire que f est höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, 1[$.