NOM :
Prénom :

Mardi 16 Janvier 2024

Interrogation 14

Limites, Continuité

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition d'une fonction convergente en $a \in \mathbb{R}$.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$. On dit que f converge en a si $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, $x \neq a \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

2. Définition de la continuité en un point.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

3. Théorème de la limite monotone.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a = \inf(I) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur I, alors f admet des limites en a et en b. Dans le cas où f est croissante, on a $\lim_{x\to a} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x\in I} f(x)$.

4. Caractérisation de la continuité par les semi-continuités.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche en a, ssi $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\x>a}]{f} (a)$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\x<a}]{} f(a)$.

5. Définition d'une limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f diverge vers l'infini en a si $\forall A > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, $x \neq a \implies f(x) \geq A$.

6. Caractérisation séquentielle de la continuité.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. Alors f est continue en a ssi $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

7. Continuité d'une composée sur un intervalle.
Soit $I, J \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$ et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

8. Borne d'une fonction à partir d'une borne de la limite.
Soit $I \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Si $\exists \ell \in \overline{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et si $\alpha \in \overline{R}$ tel que $\alpha < \ell$, alors il existe $V(a)$ un voisinage de a tel que $\forall x \in I \cap V(a)$, $\alpha < f(x)$.

Exercice 2 :
Soit la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & x \in [0, 1[\\ \sqrt{\ln(x)} & x \geq 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, $f \in \mathcal{C}^0([0,1[, \mathbb{R})$. De plus, $\ln \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ et $x \mapsto \sqrt{x} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$, donc, par composition $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R})$. Il reste à étudier le point de raccordement.

Or $f(1) = \sqrt{\ln(1)} = 0$ et f est continue à droite en 1. De plus, $1 - \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 1]{} 0 = f(1)$. Donc f est continue à gauche en 1. Donc, par caractérisation de la continuité par les demi-continuités, f est continue en 1.

Finalement, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.