NOM :
Prénom :

Mardi 23 Janvier 2024

Interrogation 15

Limites, Continuité

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Théorème des bornes atteintes.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Alors $\exists c,d \in [a,b]$, $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$.
2. Théorème de la bijection.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ strictement monotone. Alors f établit une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue, strictement monotone et de même monotonie que f.
3. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors $[\min(f(a),f(b)), \max(f(a),f(b))] \subset f([a,b])$.
4. Définition de la continuité pour une fonction complexe.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
5. Caractérisation des fonctions prolongeable par continuité.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0(]a,b[,\mathbb{R})$. f est prolongeable par continuité en a $\iff$ $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. Et dans ce cas, $\widetilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]a,b[$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ et $\widetilde{f}(a) = \ell$ est l'unique prolongement par continuité de f en a.
6. Corollaire du TVI pour les zéros de fonctions.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
7. Caractérisation de la continuité pour les fonctions complexes.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}) \iff \mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
8. Lien entre injectivité, continuité et stricte monotonie.
Les injections continues sont strictement monotones, ie si $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective, alors f est strictement monotone.

Exercice 2 :
Soit $f : x \mapsto \arctan(1/x^2)$. Étudier la continuité de f au maximum.

$x \mapsto \frac{1}{x^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ et $\arctan \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},]-\pi/2,\pi/2[)$, alors, par composition, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$.

De plus, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $\arctan(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \pi/2$. Donc, par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \pi/2$. Or $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. Donc, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \pi/2$.

On pose

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \arctan(1/x^2) & x \neq 0 \\ \pi/2 & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est c'est le seul prolongement par continuité de f en 0.