NOM :
Prénom :

Mardi 30 Janvier 2024

Interrogation 16

Dérivabilité

Correction

Exercice 1 :
Donner les définitions ou énoncés précis suivants avec quantificateurs et rédaction :

1. Définition de la dérivabilité.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. Si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie quand $x \to a$, alors on dit que f est dérivable en a et dans ce cas, on note $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. $f'(a)$ s'appelle le nombre dérivé de f en a.
2. Définition d'une fonction lipschitzienne.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.
3. Théorème de Rolle.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
4. Théorème des accroissements finis.
Soit $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^1(]a,b[,\mathbb{R})$. Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
5. Inégalités des accroissements finis.
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ tel que $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Alors $\forall a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ (f est M-lipschitzienne).
6. Définition d'une fonction convexe.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.
7. Théorème de recherche d'extremums.
Soit I un intervalle ouvert, $f \in \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
8. Inégalité de Jensen.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Alors
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Étudier f en 0.

On a $x \mapsto \frac{1}{x^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$ et $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc, par composition, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*,\mathbb{R})$. De plus,
$$-\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad e^y \xrightarrow[y\to -\infty]{} 0$$
donc par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$. Donc f est continue en 0. Donc $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

De plus, $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$. Par croissance comparée, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc on a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Donc, par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ (aka théorème satanique), f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ et on a même $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.