Chapitre 15 - TD :
Polynômes

Simon Dauguet
simon.dauguet@gmail.com

30 janvier 2024

1 Généralités

Exercice 1 :
Quels sont les degrés, les coefficients dominants et les coefficients constants des polynômes suivants :

$$(X+1)^n - (X-1)^n, \qquad (X^2+1)^n + (X^2-1)^n$$

Exercice 2 :
Trouver un polynôme P tel que $\widetilde{P}(1) = 3$, $\widetilde{P'}(1) = 4$, $\widetilde{P''}(1) = 5$ et $\forall n \geq 3$, $\widetilde{P^{(n)}}(1) = 0$.

Exercice 3 ([✓]) :
Soit $n \geq 2$. On définit une application sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P)(X) = P(-X) - P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{rg} f$ et $\ker f$.
3. Soit $Q \in \operatorname{Im} f$. Montrer alors qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \qquad \text{et} \qquad \widetilde{P}(1) = 0\ , P'(-X) = P'(X)$$

Exercice 4 :
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
2. $P(2X) = P'(X)P''(X)$
3. $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$
4. $18P = P'P''$

Exercice 5 :
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) - P_n'(X) = X^n$. Calculer P_n.

Exercice 6 :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0(X) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_n'(X).$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.
2. Calculer le degré de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que P_n a la même parité que $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 :
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Calculer P_2 et P_3.
2. Calculer le degré de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a la même parité que n.
4. Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = 1$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 8 :
Cet exercice propose de prouver l'existence de polynômes sous certaines conditions, de façons classique.

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que $\varphi(P) = P(X + a) + P(X)$ est une application linéaire.
   (b) Montrer que $\forall P \in \ker(\varphi)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\widetilde{P}(pa) = (-1)^p\widetilde{P}(0)$.
   (c) En déduire $\ker(\varphi)$.
   (d) Monter qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
   $$P(X + a) + P(X) = A(X)$$
2. Soit $Q \in \mathbb{C}_3[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = P + P' + P''$. Expliciter P lorsque $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3$.
3. Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
   $$P(X) + \widetilde{P}(a)A(X) = B(X)$$

Exercice 9 :
Soit $n, m \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(1 + X)^{n+m} = (1 + X)^n(1 + X)^m$, montrer que

$$\forall k \in \{0, \ldots, n + m\},\ \sum_{i=0}^{\min(k,n)} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Exercice 10 :
Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \widetilde{P_n}(x)e^{x^2}$. Donner en plus une relation de récurrence vérifiée par la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le degré et coefficient dominant de P_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a la parité contraire de n.

2 Arithmétique, Divisibilité

Exercice 11 :

1. Soit $P(X) = X^5 - X^3 + 5X - 2$. Faire la division euclidienne de P par $X + 2$, $(X + 1)^2$, $X^2 - 4X + 2$.
2. Soit $Q(X) = X^6 - 4X^3 + 2X^2 - 1$. Effectuer la division euclidienne de Q par $X^2 + 4$ et $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 12 (*) :
Soit $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ avec B unitaire. Montrer que le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13 ([✓]) :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg P = n$. On pose $E = \{A \in \mathbb{K}[X],\ P|A\}$. Montrer alors que

$$\mathbb{K}[X] = E \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

Exercice 14 ([✓]) :
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ dont les restes dans les divisions euclidienne par $X - 1$, $X - 2$, $X - 3$ sont $3, 7, 13$.
Déterminer le reste de la division de A par $B(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

Exercice 15 :
Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $A(X) = X^4 - X + a$ et $B(X) = X^2 - aX + 1$ aient au moins une racine commune.

Exercice 16 ([✓]) :
Déterminer a_n et b_n pour que $A_n(X) = a_nX^{n+1} + b_nX^n + 1$ soit divisible par $B(X) = (X - 1)^2$. Former alors le quotient Q_n de la division de A_n par B.

Exercice 17 ([✓]) :
Montrer que $(X - 1)^3|A_n$ avec $A_n(X) = (1 + X)(X^n - 1) + 2nX^n(1 - X) + n^2X^{n-1}(X - 1)^2$, pour tout $n \geq 1$.

Exercice 18 :
Déterminer un polynôme A unitaire de degré 3 divisible par $X - 1$ et ayant le même reste dans les divisions par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$.

Exercice 19 :
Trouver un polynôme A de degré 5 sachant que le reste dans la division euclidienne par $(X+1)^3$ est -5 et que le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^3$ est 11.

Exercice 20 (PGCD et Bézout) :
Pour chacun des couples de polynômes (A, B) suivant, déterminer un PGCD et une relation de Bézout.

1. $A(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$, $B(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$
2. $A(X) = X^5 + X^3 - X^2 - 1$, $B(X) = X^4 - 2X^3 - X + 2$

Exercice 21 (Unicité de la relation de Bézout pour des polynômes premiers entre eux) :
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non constants et premiers entre eux.
Montrer $\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AU + BV = 1$ et $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

Exercice 22 :
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer

$$A \wedge B = 1 \iff (A+B) \wedge (AB) = 1$$

Exercice 23 :
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^2 | B^2$.
Montrer que $A|B$.

3 Racines

Exercice 24 ([✓]) :
Trouver λ pour que $P(X) = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double. Factoriser $P(X)$.

Exercice 25 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Factoriser le polynôme $P(X) = (X+1)^n - e^{2i\alpha}(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 26 ([✓]) :
Montrer que $P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 27 ([✓]) :
Factoriser les polynômes

$$A(X) = X^4 + X^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad B(X) = X^8 + X^4 + 1$$

et

$$P_n(X) = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X+1) + \cdots + \frac{1}{n!}X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)$$

***Indic :** Récurrence*

Exercice 28 (**) :
Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et tels que $P^2 + Q^2$ admette a pour racine double. Montrer que a est racine de $P'^2 + Q'^2$.

***Indic :** Penser à la factorisation de $a^2 + b^2$ dans $\mathbb{C}$*

Exercice 29 :
Développer

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \omega_k X)$$

où les ω_k sont les racines n-ème de l'unité.

Exercice 30 ([✓]) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et non nuls. On pose

$$A(X) = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

et

$$B(X) = 1 + \frac{1}{abc}(X-a)(X-b)(X-c)$$

Montrer que $A = B$ sans développer ni factoriser quoi que ce soit.

Exercice 31 (***) :
Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ deux complexes distincts et $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\widetilde{P}^{-1}(\{z_1\}) = \widetilde{Q}^{-1}(\{z_1\})$ et $\widetilde{P}^{-1}(\{z_2\}) = \widetilde{Q}^{-1}(\{z_2\})$.

Montrer que $P = Q$.

Exercice 32 :
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = 2024$ et $\forall k \in \{0, \ldots, 2024\}$, $\widetilde{P}(k) = \frac{k}{k+1}$.

Calculer $\widetilde{P}(2025)$.

4 Relations coefficients/Racines

Exercice 33 :
On considère deux cercles tels que la somme de leurs périmètres est 22π et la somme de leur aires est 65π. Déterminer les rayons des deux cercles.

Exercice 34 ([✓]) :
Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Exercice 35 :
Résoudre le système
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$$

Exercice 36 ([✓]) :
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts.

1. En utilisant le polynôme $P(X) = X^3 - (x + yX + zX^2)$, résoudre le système
$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$$
2. Faire de même avec
$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^4 \\ x+by+b^2z=b^4 \\ x+cy+c^2z=c^4 \end{cases}$$

Exercice 37 :
Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ les racines complexes de $P(X) = X^3 + X + 1$.
Calculer $z_1^4 + z_2^4 + z_3^4$.

Exercice 38 (**) :
Calculer $\sum \left(\frac{\alpha+2}{2\alpha+5}\right)^2$ où α décrit l'ensemble des racines de $X^3 + 2X^2 - X + 1$.

5 Exercices complets

Exercice 39 (Polynôme de Laguerre (extrait CAPES 2011) [✓][✓]) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction h_n sur $\mathbb{R}$ par
$$h_n(x) = x^n e^{-x}$$
Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer sa dérivée n-ème.
2. Montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$ est une fonction polynômiale. Donner le polynôme L_n qui correspond.
3. Calculer L_0, L_1, L_2.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de L_n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L_n'.
   (b) Donner une relation simple entre h_n et h_{n+1}.
   (c) En déduire que $(n+1)L_{n+1} = XL_n' + (n+1-X)L_n$.
6. En remarquant que $(h_{n+1}')^{(n+1)} = (h_{n+1}^{(n+1)})'$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1}' = L_n' - L_n$$

7. À l'aide de tout ce qui précède, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0$$

et que

$$\forall n \geq 1,\ (n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0$$

Remarque :
On pourrait faire plein de choses sur les polynômes de Laguerre. Ils vérifient une autre équation fonctionnelle qui mèle équation différentielle et relation de récurrence :

$$L_{n+1}' - (n+1)L_n' + (n+1)L_n = 0$$

On peut également les exprimer à l'aide d'intégrale :

$$\widetilde{L_n}(x) = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{e^{-\frac{xz}{1-z}}}{(1-z)z^{n+1}}dz$$

où le contour se fait sur le cercle trigonométrique parcouru dans le sens directe une seule fois, *i.e.* $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Il y a encore beaucoup de choses à faire avec les polynômes de Laguerre, mais on se contentera de ça pour le moment.

Exercice 40 (Théorème de D'Alembert-Gauss) :
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de D'Alembert-Gauss.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $n = \deg(P) \geq 1$. On pose $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

1. Montrer que $|\widetilde{P}(z)| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$.
2. En déduire $\exists R > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| > R \implies |\widetilde{P}(z)| > 1 + |\widetilde{P}(0)|$.
3. Justifier que $\inf_{z\in D(0,R)} |\widetilde{P}(z)|$ existe. On note $\alpha = \inf_{z\in D(0,R)} |\widetilde{P}(z)|$.
4. Montrer $\exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(0,R)^{\mathbb{N}}$ tel que $|\widetilde{P}(z_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.
5. Montrer que α est un minimum de $\widetilde{P}$ sur $D(0,R)$ atteint en un certain $\zeta \in D(0,R)$.
6. En déduire que α est un minimum de $\widetilde{P}$ sur $\mathbb{C}$.
7. Supposons $\alpha \neq 0$. Soit $Q(X) = P(\zeta + X) \in \mathbb{C}[X]$. Soit $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ les coefficients de Q (*i.e.* $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$).
   (a) Justifier que $|b_0| = \alpha$.
   (b) Justifier que $k = \min\{j \in \{1, \dots, n\},\ b_j \neq 0\}$ existe.
   (c) Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^k = -b_0\overline{b_k}$. Soit $f : t \mapsto |\widetilde{Q}(t\omega)|$. Montrer que

   $$\exists c_{k+1}, \dots, c_n \in \mathbb{C},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \left| b_0 - |b_k|^2 b_0 t^k + \sum_{j=k+1}^{n} c_j t^j \right|.$$

   (d) Montrer que $\exists \eta > 0$ tel que

   $$\forall t \in]-\eta, \eta[,\ 0 \leq f(t) \leq \alpha(1 - |b_k|^2|t|^k) + |t|^{k+1}\left|\sum_{j=k+1}^{n} c_j t^{n-k-1}\right|.$$

   (e) En déduire que

   $$\exists M \geq 0,\ \forall t \in]-\eta, \eta[,\ f(t) \leq \alpha(1 - |b_k|^2|t|^k) + |t|^{k+1}M.$$

(f) En déduire que

$$\exists \mu > 0,\ \forall t \in]-\mu, \mu[,\ \ f(t) \leq \alpha \left(1 - \frac{|b_k|^2}{2}|t|^k\right).$$

(g) Montrer qu'on aboutit à une contradiction et conclure.