Chapitre 0

TD : Analyse dimensionnelle

Exercice 1 : Unité dérivée

♥ | ★ ☆ ☆

Remplir le tableau suivant à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

| Remarque : Ce tableau est à sa voir retrouver facilement et rapidement.

Grandeur physique	Symbole	Unité	Dimension	Unité de base du SI
Fréquence	f	Hertz (Hz)		
Force	F	Newton (N)		
Pression	P	Pasacal (Pa)		
Energie	E	Joule (J)		
Puissance	P	Watt (W)		
Vitesse	v	−		
Accélération	a	−		
Charge électrique	q	Coulomb (C)		
Tension électrique	U	Volt (V)		
Capacité	C	Farad (F)		
Résistance Inductance	R L	Ohm (Ω) Henry(H)		

Exercice 2 : Période de révolution d'un satellite

♥ | ★ ☆ ☆

Trois élèves ont effectué le calcul de la période de révolution d'un petit astre autour d'un astre plus massif, comme un satellite autour de la Terre (trajectoire circulaire et masse du satellite négligeable). Ils ont trouvé les tois résultats différents suivants :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M}}\ ;\ T = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\mathcal{G}M}}{a^2}\ \text{et}\ T = 2\pi\frac{a^2}{\sqrt{\mathcal{G}M}}$$

avec a la disance à la Terre, M la masse de la Terre et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation. Le professeur afforme qu'une des réponses est juste. Parmi les trois propositions, les autres élèves doivent trouver laquelle est la bonne par analyse dimensionnelle.

1. La force de gravitation entre deux corps A et B s'écrit, en norme :

$$F = \mathcal{G}\frac{m_A m_B}{d^2}$$

avec m_A, m_B les masses respectives des objets A et B et d la distance entre les deux objets. Déterminer la dimension de la constante de gravitation $\mathcal{G}$.

2. En déduire la bonne expression pour la période de révolution d'un satellite autour de la Terre.

Exercice 3 : Homogénéité ♥ | ★ ☆ ☆

1. On exprime la vitesse d'un corps par l'équation $v = At^3 - Bt$ où t représente le temps. Quelles sont les dimensions de A et B ?
2. Trois étudiants établissent les équations suivantes dans lesquelles x désigne la distance parcourure, a l'accélération, t le temps et l'indice 0 indique que l'on considère la quantité à l'instant $t = 0$ s :
   - cas 1 : $x = vt^2$;
   - cas 2 : $x = v_0 t + 0,5at^2$;
   - cas 3 : $x = v_0 t + 2at^2$.

   Parmi ces équations, lesquelles sont possibles ?

Exercice 4 : Force visqueuse dans un fluide ♥ | ★ ★ ☆

Un objet de taille d est mis en mouvement à la vitesse v dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η. Le fluide exerce une force F sur l'objet.

1. Quelle est la dimension de la masse volumique ?
2. La force par unité de surface de viscosité de cisaillement à une dimension s'écrit :
$$f_V = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
3. Par analyse du problème physique, la force exercée par le fluide sur l'obket doit dépendre de quatre paramètres d, v, η et ρ. On écrit alors la force sous la forme :
$$F = f(\eta, \rho, d, v) = k\eta^a \rho^b d^c v^e$$
avec k une constance sans dimension et a, b, c, e des exposants entiers ou non. Par analyse dimensionnelle, exprimer l'ensemble des exposants b, c, e en fonction de a.
4. On admettra que si l'analyse dimensionnelle donne un nombre sans dimension à une puissance donnée, alors n'importe quelle fonction de ce nombre sans dimension convient. En déuire que la force s'exprime en fonction de ρ, v, d et d'une fonction du nombre sans dimension $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$ appelé nombre de Reynolds.
5. Pour de petits nombres de Reynolds, la loi dite de Stokes donne la force qui s'exerce sur une sphère de rayon R se déplaçant à la vitesse v. Elle s'écrit $F = 6\pi\eta Rv$. Quelle doit être la forme de la fonction inconnue du nombre de Reynolds obtenue à la question précédente pour obtenir une telle loi ?
6. Pour de grands Reynolds, la force est indépendante de la viscosité. Quelle forme prend-t-elle alors ?