

Exercice 1.1 : DETERMINER UNE FONCTION DE TRANSFERT SOUS FORME CANONIQUE

Q1 : Déterminer sous forme canonique, les fonctions de transfert des systèmes modélisés par les équations différentielles ci-dessous. En déduire pour chacune le gain statique, la classe et l'ordre. Indiquer si le modèle est stable. Définir les conditions initiales de la réponse à l'instant $t_0 = 0$.

a. $7 \frac{ds(t)}{dt} + 3s(t) = 5e(t) \xrightarrow{L} 7pS(p) + 3S(p) = 5E(p) \Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{7p+3} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{7}{3}p}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre : 1} \\ \text{classe : 0} \\ \text{gain statique : } \frac{5}{3} \end{array} \right.$

Stable (premier ordre, coefficients du dénominateur strictement positifs)
Condition initiale pour un premier ordre : $s(0) = 0$

b. $s(t) = 8e(t) \xrightarrow{L} S(p) = 8E(p) \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = 8}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre : 0} \\ \text{classe : 0} \\ \text{gain statique : 8} \end{array} \right.$ Stable. Pas de condition initiale.

c. $5 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 4 \frac{ds(t)}{dt} + 7s(t) = 3 \frac{de(t)}{dt} + 2e(t) \xrightarrow{L} S(p)[5p^2 + 4p + 7] = E(p)[3p + 2]$
 $\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3p+2}{5p^2+4p+7} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2}p}{1 + \frac{4}{7}p + \frac{5}{7}p^2}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre : 2} \\ \text{classe : 0} \\ \text{gain statique : } \frac{2}{7} \end{array} \right.$

Stable (classe 0, deuxième ordre, coefficients du dénominateur strictement positifs)
Conditions initiales pour un deuxième ordre : $s(0) = \frac{ds}{dt}(0) = 0$.

d. $M \frac{d^2s(t)}{dt^2} = -f \frac{ds(t)}{dt} + i e(t) \xrightarrow{L} S(p)[Mp^2 + fp] = iE(p)$
 $\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{i}{Mp^2 + fp} \Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{i}{fp} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{f}p}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre : 2} \\ \text{classe : 1} \\ \text{gain statique : } \frac{i}{f} \end{array} \right.$

Instable (classe 1)

e. $\frac{d^3s(t)}{dt^3} + 7 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 12 \frac{ds(t)}{dt} + 90s(t) = 2 \frac{d^2e(t)}{dt^2} + 5 \frac{de(t)}{dt} \xrightarrow{L} S(p)[p^3 + 7p^2 + 12p + 90] = E(p)[2p^2 + 5p]$
 $\Rightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p^2 + 5p}{p^3 + 7p^2 + 12p + 90}$
 $\Rightarrow \boxed{\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{5}{90}p \cdot \frac{1 + \frac{2}{5}p}{1 + \frac{12}{90}p + \frac{7}{90}p^2 + \frac{p^3}{90}}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordre : 3} \\ \text{classe : -1} \\ \text{gain statique : } \frac{1}{18} \end{array} \right.$

Classe ≤ 0 et coefficients du dénominateur strictement positifs.
Mais la condition complémentaire $7 \times 12 > 1 \times 90$ n'est pas vérifiée. Le modèle est instable.

Q2 : Si cela est possible, déterminer la valeur finale de la réponse à un échelon d'amplitude E_0 .

- De classe 0 : $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K E_0 = \frac{5}{3} E_0$
- De classe 0, $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K E_0 = 8 E_0$
- De classe 0 : $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) = K E_0 = \frac{2}{7} E_0$
- De classe 1, instable.
- De classe -1 mais instable (classe -1 : aurait convergé vers 0 si le modèle avait été stable).

Exercice 1.2 : FOUR ELECTRIQUE

Q1 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système sous forme canonique. Sous quelle condition le modèle est-il stable ?

$$2 \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 6\alpha \frac{d\theta(t)}{dt} + 4\theta^2 s(t) = K u(t) \xrightarrow{L} \Theta(p) [2p^2 + 6\alpha p + 4\alpha^2] = K U(p)$$

$$\text{Soit } \Theta(p) = \underbrace{\frac{K}{2p^2 + 6\alpha p + 4\alpha^2}}_{H(p)} U(p) \text{ d'où } H(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{K}{2p^2 + 6\alpha p + 4\alpha^2} = \frac{K}{4\alpha^2} \frac{1}{1 + \frac{3}{2\alpha} p + \frac{1}{2\alpha^2} p^2}$$

Gain statique : $\frac{K}{4\alpha^2}$, classe 0 et ordre 2. Modèle stable si $\alpha > 0$.

Q2 : Sachant que $u(t)$ est un échelon d'amplitude U_0 , donner l'expression de $u(t)$ puis $U(p)$.

Dans les hypothèses de Heaviside :

$$\begin{cases} u(t) = U_0 & \text{pour } t \geq 0 \\ u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{L} \boxed{U(p) = \frac{U_0}{p}}$$

Q3 : En déduire $\Theta(p)$ en fonction des constantes α , K et U_0 .

$$\boxed{\Theta(p) = \frac{K U_0}{(2p^2 + 6\alpha p + 4\alpha^2)p}}$$

Q4 : Déterminer la variation finale de cette réponse.

Le système étant de classe 0 : $\Delta \theta(+\infty) = \frac{K}{4\alpha^2} U_0$.

Par le théorème de la valeur finale : $\Delta \theta(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \Theta(p) = \boxed{\frac{K U_0}{4\alpha^2}}$

Q5 : Identifier $\Delta \theta(+\infty)$ sur le graphique et en déduire une condition, fonction de U_0 , K et α , devant être vérifiée pour que le modèle corresponde aux résultats expérimentaux.

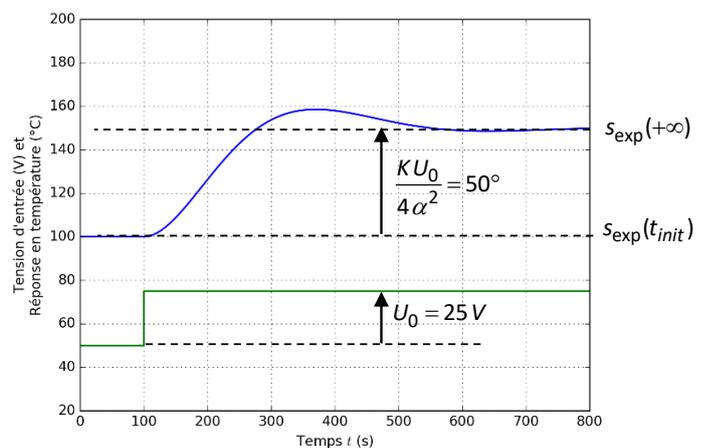
Sur le graphique, on relève : $U_0 = 25 \text{ V}$ et $\Delta \theta(+\infty) = 50^\circ$.

Pour que le comportement expérimental corresponde au

modèle théorique, il faut que : $\Delta \theta_{\text{exp}}(+\infty) = \frac{K}{4\alpha^2} U_0$,

D'où la condition qui doit être vérifiée :

$$\frac{K}{4\alpha^2} = \frac{\Delta \theta_{\text{exp}}(+\infty)}{U_0} = \frac{50}{25} \text{ } ^\circ/\text{V}.$$

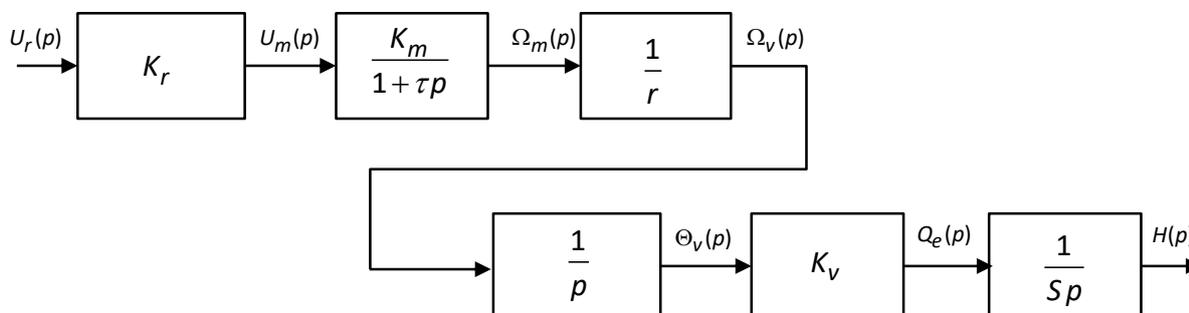


Exercice 1.3 : SYSTEME RAMSES

Q1 : Déterminer les fonctions de transfert des différents blocs et compléter le schéma ci-dessous en indiquant, dans chaque bloc, la fonction de transfert associée.

En exprimant, pour chaque composant, la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée, dans le domaine de Laplace, on obtient les relations suivantes :

- **régulateur** : $u_m(t) = K_r u_r(t) \xrightarrow{L} U_m(p) = K_r U_r(p)$
- **moteur** : $\tau \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m \cdot u_m(t) \xrightarrow{L} \tau p \Omega_m(p) + \Omega_m(p) = K_m U_m(p) \Rightarrow \Omega_m(p) = \frac{K_m}{1 + \tau p} U_m(p)$
- **réducteur** de rapport de transmission $r (r > 1)$: $\omega_v(t) = \frac{1}{r} \omega_m(t) \xrightarrow{L} \Omega_v(p) = \frac{1}{r} \Omega_m(p)$
- **vanne** : $q_e(t) = K_v \vartheta_v(t)$ avec $\omega_v(t) = \frac{d\vartheta_v(t)}{dt} \xrightarrow{L} Q_e(p) = K_v \Theta_v(p)$ et $\Omega_v(p) = p \Theta_v(p) \Leftrightarrow \Theta_v(p) = \frac{1}{p} \Omega_v(p)$
- **réservoir fermé** : $q_e(t) = S \frac{dh(t)}{dt} \xrightarrow{L} Q_e(p) = S p H(p) \Leftrightarrow H(p) = \frac{1}{S p} Q_e(p)$



Q2 : Déterminer la fonction de transfert $\frac{H(p)}{U_r(p)}$ sous forme canonique. Indiquer le gain, l'ordre et la classe. Le modèle est-il stable ?

Les différents blocs sont en série. Pour obtenir la fonction de transfert permettant de calculer $H(p)$ en fonction de $U_r(p)$, il suffit de multiplier les blocs entre eux :

$$\frac{H(p)}{U_r(p)} = K_r \frac{K_m}{1 + \tau p} \frac{1}{r} \frac{1}{p} K_v \frac{1}{S p} = \frac{K_r K_m K_v}{(1 + \tau p) r S p^2} = \frac{K_r K_m K_v}{r S} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + \tau p}$$

fonction de transfert d'ordre 3, de classe 2 et de gain $\frac{K_r K_m K_v}{r S}$.

Le modèle n'est pas stable.

Le modèle comprend un premier ordre stable intégré deux fois. La vitesse de rotation de la vanne tend vers une valeur finale, mais le modèle comprend 2 intégrateurs. La valeur finale tend vers $+\infty$.