Sciences de l'ingénieur

TD 2 : COMPORTEMENT GEOMETRIQUE D'UNE STRUCTURE OUVERTE

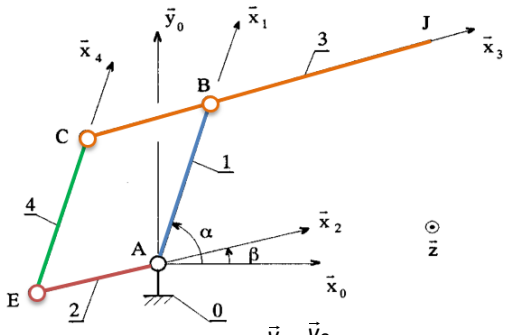
C 01

CORRIGE

Exercice 2.1 : **ROBOT DE MANUTENTION / TRANSLATION CIRCULAIRE**

Q1 : Mettre le schéma cinématique en couleur et Identifier les points fixes dans les ensembles 0, 1, 2, 3 et 4.

Solide	0	1	2	3	4
Points fixes	*A*	*A, B*	*A, E*	*B, C, J*	*E, C*



Q2 : ABCE étant un parallélogramme, qu'en déduire sur les bases liées à 1, 2, 3 et 4. En déduire un repère lié « simplifié » pour le solide 3.

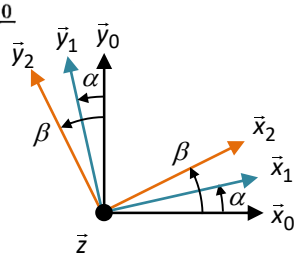
Le vecteur $\vec{z}$ est commun à toutes les bases.

Le segment EA reste parallèle au segment CB, d'où $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ et $B_3 = B_2$.

Le segment AB reste parallèle au segment EC, d'où $\vec{x}_1 = \vec{x}_4$ et $B_4 = B_1$.

Il n'y a finalement que 3 bases différentes : B_0, B_1 et B_2.

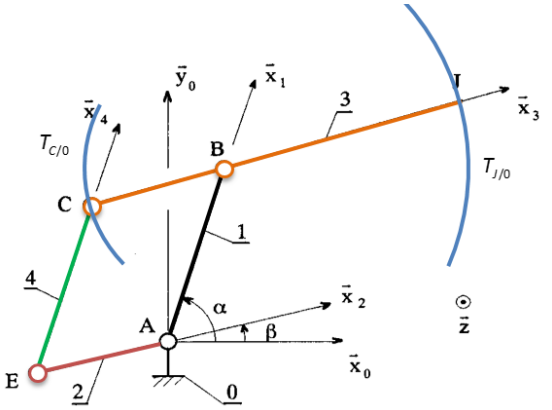
Un repère lié à 3 est $R_3(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$



Q3 : Réaliser la ou les figures de changement de base.

Les 3 bases ont un même vecteur commun.
Elles doivent être positionnées sur une même figure.
On prendra naturellement $\beta > \alpha$, mais faire une figure avec $\alpha > \beta$ est juste aussi.

Q4 : Lorsque le moteur M1 est à l'arrêt, α est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par β ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.

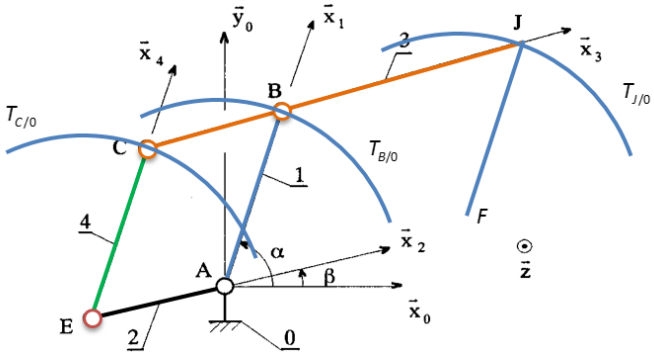


Si α est contant, la position de l'origine B de R_3 est fixe.

Si β varie, la base liée à 3 tourne par rapport à B_0. Le mouvement de 3/0 est une rotation d'axe $(B, \vec{z})$ paramétrée par l'angle β.

Les trajectoires de J et C sont des cercles de centre B passant respectivement par J et C.

Q5 : Lorsque le moteur M2 est à l'arrêt, β est constant. Déterminer, dans ces conditions, le mouvement de 3/0 paramétré par α ainsi que les trajectoires $T_{J/0}$ et $T_{C/0}$.



Si β est contant, la position de la base B_2 liée à 3 est fixe.

Si α varie, l'origine B de R_3 décrit un cercle de centre A.

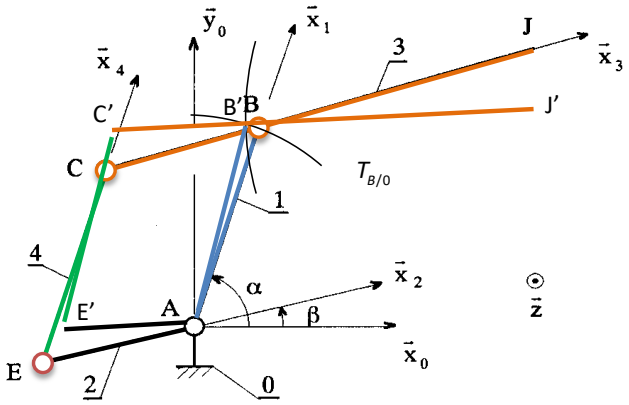
Le mouvement de 3/0 est donc une translation à trajectoire circulaire paramétré par l'angle α et de rayon AB.

La trajectoire de C est un cercle de centre E.

La trajectoire de J est un cercle de centre F tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB}$.

Q6 : Tracer sur le schéma le mécanisme avec le point J déplacé verticalement de 1 cm (à l'échelle de la figure) suivant $-\vec{y}_0$. Noter et déterminer dans cet ordre les différents points : J', B', C', E'.

Les segments AB et BJ sont de longueurs constantes, ce qui permet de déterminer le point B', intersection des cercles centrés sur J' et A.



Q7 : Déterminer un vecteur position de J dans (0).

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = L\,\vec{x}_1 + H\,\vec{x}_2$

Q8 : Déterminer le modèle géométrique direct en notant X et Y les coordonnées opérationnelles $\overrightarrow{AJ} = X\,\vec{x}_0 + Y\,\vec{y}_0$.

La relation entre les coordonnées articulaires et opérationnelles s'écrit : $X\,\vec{x}_0 + Y\,\vec{y}_0 = L\,\vec{x}_1 + H\,\vec{x}_2$

> Relation vectorielle à projeter sur les directions $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ en utilisant le produit scalaire. Prenez cette habitude.

Sur $\vec{x}_0$: $(X\,\vec{x}_0 + Y\,\vec{y}_0)\cdot\vec{x}_0 = (L\,\vec{x}_1 + H\,\vec{x}_2)\cdot\vec{x}_0 \Rightarrow X = L\,\vec{x}_1\cdot\vec{x}_0 + H\,\vec{x}_2\cdot\vec{x}_0 = L\cos\alpha + H\cos\beta$

Sur $\vec{y}_0$: $Y = L\,\vec{x}_1\cdot\vec{y}_0 + H\,\vec{x}_2\cdot\vec{y}_0 = L\sin\alpha + H\sin\beta$

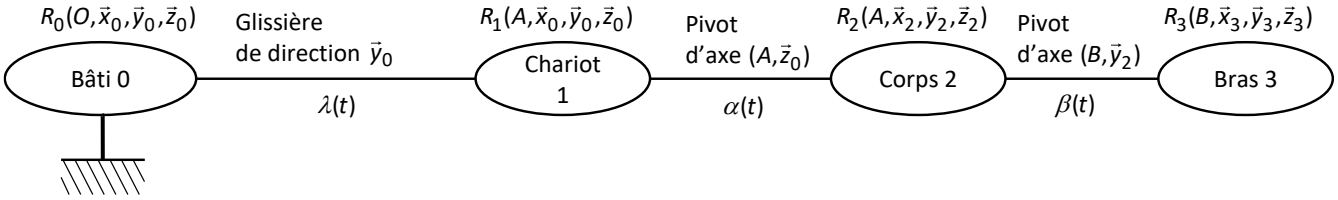
Le modèle géométrique direct s'écrit : $\boxed{\begin{cases} X = L\cos\alpha + H\cos\beta \\ Y = L\sin\alpha + H\sin\beta \end{cases}}$

Exercice 2.2 : **ROBOT DE PEINTURE**

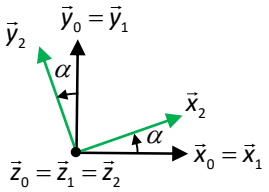
Q1 : Repasser en couleur chaque ensemble du schéma cinématique puis représenter le modèle sous la forme d'un graphe des liaisons (avec liaisons, repères liés et paramètres de position).

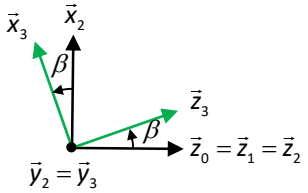
S_1 étant en translation par rapport à S_0, les bases liées peuvent être identiques. $\vec{z}_1$ (et donc $\vec{z}_0$) est commun à B_1 et B_2. $\vec{y}_2$ est commun à B_2 et B_3.

> Ne pas hésiter à reporter ces informations sur le schéma du sujet !



Q2 : Compléter les figures de changement de base associées aux paramètres $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.





Q3 : Estimer, dans la configuration du schéma cinématique, des valeurs approchées de α et β.

On trouve : α □+45□ et β=+45□.

> Les sens positifs sont ceux qui « envoient » $\vec{x}$ sur $\vec{y}$, $\vec{y}$ sur $\vec{z}$ et $\vec{z}$ sur $\vec{x}$.

Q4 : Définir la trajectoire $T_{P/2}$ et de $T_{B/0}$.

P est un point fixe de (3). (3) a un mouvement de rotation d'axe $(B,\vec{y}_2)$ par rapport à (2).

La trajectoire $T_{P/2}$ est un arc de cercle de rayon $[BP]$ inclus dans le plan $(B,\vec{x}_2,\vec{z}_1)$.

B est sur l'axe de la liaison pivot entre (1) et (2), *B* est donc fixe dans (1).

(1) étant en liaison glissière avec (0), la trajectoire de *B* dans (0) est un segment de droite inclus dans $(B,\vec{y}_1)$.

Q5 : Définir un vecteur position de *P* dans (0).

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3$

Dépendent du temps : $\lambda(t)$ et $\vec{z}_3$ (dans B_0).

Q6 : Déterminer le modèle géométrique direct : relations scalaires entre les coordonnées opérationnelles et les paramètres de position des liaisons.

$X=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{x}_0=(\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3)\cdot\vec{x}_0=\lambda(t)\,\vec{y}_0\cdot\vec{x}_0+H\,\vec{z}_0\cdot\vec{x}_0+L\,\vec{z}_3\cdot\vec{x}_0=0+0+L\sin\beta\cos\alpha$ (i)

$Y=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{y}_0=(\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3)\cdot\vec{y}_0=\lambda(t)\,\vec{y}_0\cdot\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0\cdot\vec{y}_0+L\,\vec{z}_3\cdot\vec{y}_0=\lambda+0+L\sin\beta\sin\alpha$ (ii)

$Z=\overrightarrow{OP}\cdot\vec{z}_0=(\lambda(t)\,\vec{y}_0+H\,\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3)\cdot\vec{z}_0=\lambda(t)\,\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0+H\,\vec{z}_0\cdot\vec{z}_0+L\,\vec{z}_3\cdot\vec{z}_0=0+H+L\cos\beta$ (iii)

Soit $\begin{cases} X=L\sin\beta\cos\alpha \\ Y=\lambda+L\sin\beta\sin\alpha \\ Z=H+L\cos\beta \end{cases}$

Q7 : Déterminer le modèle géométrique inverse.

(iii) $\beta=\arccos\dfrac{Z-H}{L}$, compris entre 0 et π

(i) $\alpha=\arccos\dfrac{X}{L\sin\beta}$, compris entre 0 et π si β □0

(ii) $\lambda=Y-L\sin\beta\sin\alpha$

> Ces équations permettent aussi de déterminer l'espace de travail du robot (valeurs de *X*, *Y* et *Z* atteignables). Par exemple, la première équation impose que $-1\le(Z-H)/L\le1$, soit $H-L\le Z\le L+H$.

Exercice 2.3 : **ECHELLE E.P.A.S.**

Q1 : Par projection (produit scalaire) déterminer *X*, *Y* et *Z* en fonction des paramètres de position α, θ, *x* et des dimensions.

- Sur $\vec{x}_0$: $X=\overrightarrow{OD}\cdot\vec{x}_0=\left(-R\,\vec{x}_1+b\,\vec{y}_0+x\,\vec{x}_2\right)\cdot\vec{x}_0=-R\,\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_0}_{\cos\alpha}+b\,\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{x}_0}_{0}+x\,\vec{x}_2\cdot\vec{x}_0$

avec $\vec{x}_2=\cos\theta\,\vec{x}_1+\sin\theta\,\vec{y}_0$, d'où : $\vec{x}_2\cdot\vec{x}_0=\cos\theta\,\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_0}_{\cos\alpha}+\sin\theta\,\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{x}_0}_{0}=\cos\theta\cos\alpha$

soit : $X=-R\cos\alpha+x\cos\theta\cos\alpha=\cos\alpha\,(x\cos\theta-R)$

- Sur $\vec{y}_0$: $Y=\overrightarrow{OD}\cdot\underbrace{\vec{y}_0}_{=\vec{y}_1}=-R\,\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{y}_1}_{0}+b+x\,\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{y}_1}_{\sin\theta}=b+x\sin\theta$
- Sur $\vec{z}_0$: $Z=\overrightarrow{OD}\cdot\vec{z}_0=-R\,\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{z}_0}_{-\sin\alpha}+0+x\,\vec{x}_2\cdot\vec{z}_0$

avec $\vec{x}_2\cdot\vec{z}_0=\cos\theta\,\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{z}_0}_{-\sin\alpha}+\sin\theta\,\underbrace{\vec{y}_0\cdot\vec{z}_0}_{0}=-\cos\theta\sin\alpha$, soit : $Z=R\sin\alpha-x\sin\alpha\cos\theta=-\sin\alpha(x\cos\theta-R)$

On obtient le système : $\boxed{\begin{cases} X=\cos\alpha\,(x\cos\theta-R) & (i) \\ Y=b+x\sin\theta & (ii) \\ Z=-\sin\alpha(x\cos\theta-R) & (iii) \end{cases}}$

Q2 : Déterminer α en fonction de X et Z, puis θ en fonction de X, Y et α.

(iii)/(i) $\frac{Z}{X}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha$. D'où, $\alpha=\arctan\frac{-Z}{X}[\pi]=\underline{-\arctan\frac{Z}{X}}$ si $X>0$.

(i) et (ii) donnent le sous-système : $\begin{cases} X=\cos\alpha\,(x\cos\theta-R) \\ Y=b+x\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cos\theta=R+\frac{X}{\cos\alpha} & (a) \\ x\sin\theta=Y-b & (b) \end{cases}$ si $\alpha<\pi/2$.

Avec $\theta>0$, (b)/(a) donne : $\underline{\tan\theta=\frac{Y-b}{R+\frac{X}{\cos\alpha}}}$

Q3 : En déduire 3 équations, qui appliquées successivement, permettent de définir un modèle inverse.

Connaissant α et θ, on peut déterminer x avec une des équations (i), (ii) ou (iii). Exemple avec (i) : $x=\frac{X}{\cos\alpha\cos\theta}+\frac{R}{\cos\theta}$.

On peut alors déterminer les coordonnées articulaires en appliquant successivement les 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha=-\arctan\frac{Z}{X} \\ \theta=\arctan\frac{Y-b}{R+\frac{X}{\cos\alpha}} \\ x=\frac{X}{\cos\alpha\cos\theta}+\frac{R}{\cos\theta} \end{cases}$$

Q4 : Déterminer les paramètres de position permettant d'atteindre la position $(X,Y,Z)=(5,20,10)$ m.

On obtient, pas application successive des formules : $\alpha=$ -63°, $\theta=$ 56° et $x=$ 23,3 m.

Q5 : Exprimer vectoriellement cette contrainte. . En déduire une condition sur les paramètres de position.

$\left|\overrightarrow{OD}\cdot\vec{z}_0\right|<15{,}5\,\text{m}$, soit : $\left|-\sin\alpha(x\cos\theta-R)\right|\le 15{,}5$

Q6 : L'exigence 1.1 est-elle vérifiée ?

Sur le graphique, la courbe donnant la hauteur en fonction de x donne, pour x = 30 m, Y □25m. L'exigence est vérifiée.

Exercice 2.4 : **ROBOT ERICC**

Q1 : Traduire cette contrainte sur les paramètres.

La distance du point B à l'origine O est $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|$. La condition s'écrit : $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|\le R$.

avec $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}}=\sqrt{(a\cdot\vec{x}_1+b\cdot\vec{x}_2)^2}=\sqrt{a^2\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}_{1}+b^2\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_2}_{1}+2ab\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2}_{\cos\beta}}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\beta}$

La contrainte s'écrit, $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\beta}\le R$, ou plutôt : $\underline{a^2+b^2+2ab\cos\beta\le R^2}$ ou $\cos\beta\le\frac{R^2-a^2-b^2}{2ab}$.

Q2 : Déterminer la condition pour que B soit sur un cercle de rayon r et de centre C tel que $\overrightarrow{OC}=d\,\vec{x}_0$. On suppose r et d suffisamment petits.

La condition s'écrit : $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=r$ avec $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=-d\,\vec{x}_0+a\,\vec{x}_1+b\,\vec{x}_2$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\sqrt{\overrightarrow{CB}^2}=\sqrt{(-d\,\vec{x}_0+a\,\vec{x}_1+b\,\vec{x}_2)^2}=\sqrt{d^2\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_0}_{1}+a^2\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_1}_{1}+b^2\underbrace{\vec{x}_2\cdot\vec{x}_2}_{1}-2da\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_1}_{\cos\alpha}-2\text{db}\underbrace{\vec{x}_0\cdot\vec{x}_2}_{\cos(\alpha+\beta)}+2ab\underbrace{\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2}_{\cos\beta}}$$

$$=\sqrt{d^2+a^2+b^2-2da\cos\alpha-2\text{db}\cos(\alpha+\beta)+2ab\cos\beta}$$

D'où la condition : $d^2+a^2+b^2-2da\cos\alpha-2\text{db}\cos(\alpha+\beta)+2ab\cos\beta=r^2$