PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

TD 3 : COMPORTEMENT GEOMETRIQUE D'UNE STRUCTURE FERMEE

C 01

CORRIGE

Exercice 3.1 : STABILISATEUR CARDIAQUE

Q1 : Par fermeture géométrique, déterminer le système d'équations liant λ, α, et γ aux paramètres géométriques.

Fermeture géométrique dans la boucle (0-1-2-3-0) :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d_1\,\vec{y}_0 = \lambda\,\vec{x}_0 + L_2\,\vec{x}_2 + d_1\,\vec{y}_1 - L_1\,\vec{x}_1$$

En projection : $/\vec{x}_0$: $0 = \lambda + L_2\,\vec{x}_2\cdot\vec{x}_0 + d_1\,\vec{y}_1\cdot\vec{x}_0 - L_1\,\vec{x}_1\cdot\vec{x}_0 \Leftrightarrow 0 = \lambda + L_2\cos\gamma - d_1\sin\alpha - L_1\cos\alpha$

$/\vec{y}_0$: $d_1 = 0 + L_2\,\vec{x}_2\cdot\vec{y}_0 + d_1\,\vec{y}_1\cdot\vec{y}_0 - L_1\,\vec{x}_1\cdot\vec{y}_0 \Leftrightarrow d_1 = L_2\sin\gamma + d_1\cos\alpha - L_1\sin\alpha$

D'où le système : $\begin{cases}\lambda = -L_2\cos\gamma + d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha\\ d_1 = L_2\sin\gamma + d_1\cos\alpha - L_1\sin\alpha\end{cases}$

Q2 : En déduire l'expression de λ en fonction de α et des caractéristiques géométriques du système. Exprimer la valeur λ_0 prise par λ dans la configuration de repos ($\alpha = 0$).

Le paramètre à supprimer du système est l'angle γ.

$L_2\cos\gamma = d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha - \lambda$

$L_2\sin\gamma = d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha$

D'où : $L_2^2 = (d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha - \lambda)^2 + (d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha)^2$

$\Leftrightarrow (d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha - \lambda)^2 = L_2^2 - (d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha)^2 \Rightarrow d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha - \lambda = \pm\sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha)^2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha \pm \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha)^2}}$

La solution retenue correspond au λ le plus petit : $\boxed{\lambda = d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha - \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1\cos\alpha + L_1\sin\alpha)^2}}$

Pour $\alpha = 0$ l'équation donne : $\lambda_0 = L_1 - \sqrt{L_2^2 - (d_1 - d_1)^2} = L_1 - L_2$

Q3 : Linéariser le système d'équations obtenu question 1 et exprimer $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ et γ en fonction de α.

α et γ sont petits.

$\begin{cases}\lambda = -L_2\cos\gamma + d_1\sin\alpha + L_1\cos\alpha\\ d_1 = L_2\sin\gamma + d_1\cos\alpha - L_1\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda \simeq -L_2 + d_1\,\alpha + L_1\\ d_1 \simeq L_2\,\gamma + d_1 - L_1\,\alpha\end{cases}$.

La première équation donne : $\Delta\lambda \simeq d_1\,\alpha$

Q4 : Déterminer $y(t)$ en fonction de α, puis, après linéarisation, en fonction de $\Delta\lambda$ et des caractéristiques géométriques du système.

$y(t) = \overrightarrow{AE}\cdot\vec{y}_0 = (L_1\,\vec{x}_1 + L_4\,\vec{x}_4)\cdot\vec{y}_0 = L_1\sin\alpha + L_4\sin\alpha$

α est supposé petit, d'où : $y(t) \simeq L_1\,\alpha + L_4\,\alpha \simeq (L_1 + L_4)\alpha \simeq \boxed{\dfrac{L_1 + L_4}{d_1}\Delta\lambda}$

Q5 : Déterminer $\Delta\lambda$ pour obtenir un déplacement y de 5 mm. Conclure sur l'hypothèse de petit déplacement.

Avec $\beta = 0$, $\Delta\lambda = \dfrac{d_1}{L_1 + L_4}y = 0{,}465$ mm

Pour cette valeur, $\alpha = \dfrac{\Delta\lambda}{d_1} = 0{,}015$ rad, angle effectivement « petit » permettant de confondre le cosinus avec l'unité et l'angle avec le sinus de l'angle.

$\cos(0{,}015) = 0{,}99988$ et $\sin(0{,}015) = 0{,}014999$

Exercice 3.2 : **TUYERE A OUVERTURE VARIABLE**

Q1 : Exprimer l'angle α en fonction de x sous la forme $\alpha = -\arccos\big(f(x)\big) + \arctan\big(g(x)\big)$ en précisant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Par fermeture géométrique, on obtient : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$, soit $h\vec{y}_1 + x\vec{x}_1 + \ell\vec{x}_4 - h\vec{y}_5 - \ell\vec{x}_2 = \vec{0}$

En projection dans la base 1 : $\begin{cases} x + \ell\cos\beta + h\sin\alpha - \ell = 0 \\ h + \ell\sin\beta - h\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell\cos\beta = \ell - x - h\sin\alpha \\ \ell\sin\beta = -h + h\cos\alpha \end{cases}$

On a donc : $\ell^2 = (\ell - x - h\sin\alpha)^2 + (-h + h\cos\alpha)^2$

$$= \left(\ell - x\right)^2 + h^2\sin^2\alpha - 2\left(\ell - x\right)h\sin\alpha + h^2 - 2h^2\cos\alpha + h^2\cos^2\alpha$$

$$= \left(\ell - x\right)^2 - 2\left(\ell - x\right)h\sin\alpha + 2h^2 - 2h^2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow h\cos\alpha + \left(\ell - x\right)\sin\alpha = \frac{-\ell^2 + \left(\ell - x\right)^2 + 2h^2}{2h} \Rightarrow h\cos\alpha + \left(\ell - x\right)\sin\alpha = \frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h} \qquad (1)$$

Posons φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{h}{\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{\left(\ell - x\right)}{\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}$, soit $\tan\varphi = \dfrac{\ell - x}{h}$

L'équation (1) devient : $\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha = \dfrac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}$

On en déduit que : $\cos(\alpha - \varphi) = \dfrac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}$. La solution existe si $\dfrac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}} \leq 1$.

Les solutions sont :

$$\alpha(x) = \pm\arccos\left(\frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}\right)[2\pi] + \arctan\left(\frac{\ell - x}{h}\right)[\pi] = \pm\arccos\left(\frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\ell - x}{h}\right)[\pi].$$

La solution retenue doit vérifier $\alpha(0) = 0$. Pour x positif, Les valeurs de α sont négatives et supérieures à $-\pi$.

La solution à retenir est celle proposée* :

$$\alpha(x) = -\arccos\left(\frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\ell - x}{h}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = -\arccos\big(f(x)\big) + \arctan\big(g(x)\big)}$$

$$\text{avec } \boxed{f(x) = \frac{2h^2 + x^2 - 2\ell x}{2h\sqrt{(\ell - x)^2 + h^2}}} \text{ et } \boxed{g(x) = \frac{\ell - x}{h}}$$

* développement (non demandé) :

Pour x=0 : $\alpha(0) = 0 \Rightarrow \pm\arccos\left(\dfrac{2h^2}{2h\sqrt{\ell^2 + h^2}}\right) + \arctan\left(\dfrac{\ell}{h}\right)[\pi] = 0 \Rightarrow (-1)^i\arccos\left(\dfrac{h}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}\right) + \arctan\left(\dfrac{\ell}{h}\right) + k\pi = 0$

Les distances sont toutes positives : $\arctan\left(\dfrac{\ell}{h}\right) \in \left]0, \pi/2\right[$ et $\arccos\left(\dfrac{h}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}\right) \in \left]0, \pi/2\right[$.

La relation recherchée est vérifiée pour $k = 0$ et $i = 1$: $-\arccos\left(\dfrac{h}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}\right) + \arctan\left(\dfrac{\ell}{h}\right) = 0$ vérifiée aussi car $\cos\big(\arccos x\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Q2 : Par observation du schéma cinématique, donner l'expression du diamètre D de la veine fluide en fonction de α et de D_0, diamètre de la section pour α = 0.

On a : $\frac{D}{2} = \ell \sin\alpha + \frac{D(\alpha=0)}{2}$

Le diamètre de la veine fluide est donc $\boxed{D = D_0 + 2L\sin\alpha}$, ($\alpha$ négatif) le « rétrécissement » étant de $-L\sin\alpha$ de manière symétrique par rapport à l'axe.

Q3 : En déduire, à partir du cahier des charges relatif à l'exigence étudiée, la course nécessaire des vérins.

On en déduit que la course des vérins permettant de faire varier le diamètre de la veine de fluide de 400 à 600 mm doit être : $\boxed{C = 100\text{ mm}}$

Q4 : Proposer une expression affine de D en fonction de x.

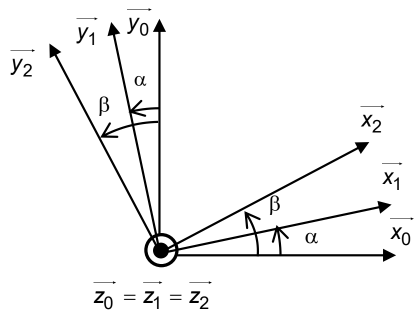
Par lecture graphique, on a : $\boxed{D = -2x + D_0}$ avec $D_0 = 600\text{mm}$

Exercice 3.3 : **MICROMOTEUR DE MODELISME**

Q1 : Déterminer, à l'aide d'une fermeture géométrique et par projection, la loi entrée-sortie en position $\alpha = g(x)$ et la relation $x = f(\alpha)$ du mécanisme de transformation de mouvement.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, soit : $x\,\vec{x}_0 = e\,\vec{x}_1 + L\,\vec{x}_2$

<u>Par projection sur la base de référence des angles (B0) :</u>



> Un point sur l'axe (la droite) d'une liaison pivot est fixe dans les deux ensembles en liaison.

$/\vec{x}_0$: $x\,\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = e\,\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 + L\,\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 \Rightarrow x = e\cos\alpha + L\cos\beta$ (1)

$/\vec{y}_0$: $x\,\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 = e\,\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 + L\,\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow 0 = e\sin\alpha + L\sin\beta$ (2)

> On cherche une loi entrée-sortie de type $\alpha = g(x)$, il faut donc éliminer β (paramètre intermédiaire) de ces deux relations…
> *Pour cela, à partir des deux relations obtenues :*
> - *on isole les cosinus et sinus du paramètre angulaire dont on veut se débarrasser ;*
> - *on élève au carré ;*
> - *on utilise la relation de trigonométrie* $\boxed{\cos^2\cdots + \sin^2\cdots = 1}$.

(1)$\Rightarrow L\cos\beta = x - e\cos\alpha$

(2)$\Rightarrow L\sin\beta = -e\sin\alpha$

$(1)^2 + (2)^2$ donne $L^2 = (x - e\cos\alpha)^2 + e^2\sin^2\alpha$ (*i*)

Pour <u>déterminer</u> $\alpha = g(x)$, on développe l'équation obtenue :

$$(i) \Leftrightarrow L^2 = x^2 + e^2\cos^2\alpha - 2xe\cos\alpha + e^2\sin^2\alpha \Leftrightarrow L^2 = x^2 + e^2 - 2xe\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{x^2+e^2-L^2}{2xe}.$$

Cette équation les solutions : $\boxed{\alpha = \pm\arccos\frac{x^2+e^2-L^2}{2xe}\,[2\pi]}$ avec $x \in [L-e, L+e]$ si $L > e$.

Pour <u>déterminer</u> $x = f(\alpha)$, **on ne développe pas l'équation obtenue** :

$$(i) \Leftrightarrow (x - e\cos\alpha)^2 = L^2 - e^2\sin^2\alpha \Rightarrow x - e\cos\alpha = \pm\sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha} \Rightarrow x = e\cos\alpha \pm \sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha}$$

Ce qui nous donne : $\boxed{x = e\cos\alpha + \sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha}}$, car pour le mécanisme étudié x est supposé positif.

Q2 : Déterminer ces mêmes relations à partir de la norme au carré de $\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_2$ mais aussi $\overrightarrow{AB} = -e\,\vec{x}_1 + x\,\vec{x}_0$

On exprime la norme de $\overrightarrow{AB}$ au carré : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = L^2$ et aussi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = (x\,\vec{x}_0 - e\,\vec{x}_1)^2 = x^2 + e^2 - 2xe\,\underbrace{\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1}_{\cos\alpha}$

D'ou : $L^2 = x^2 + e^2 - 2xe\cos\alpha$.

> On retrouve la même équation que celle obtenue après développement dans la question précédente.

Pour <u>déterminer</u> $\alpha = g(x)$, on retrouve les solutions : $\alpha = \pm\arccos\dfrac{x^2 + e^2 - L^2}{2xe}\,[2\pi]$

Pour <u>déterminer</u> $x = f(\alpha)$, on résout l'équation en x : $x^2 - 2xe\cos\alpha - L^2 + e^2 = 0$

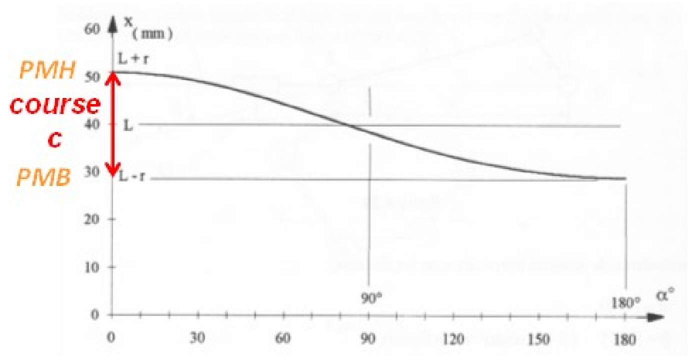
Discriminant : $\Delta = 4e^2\cos^2\alpha - 4\left(L^2 - e^2\right) = 4L^2 - 4e^2(1-\cos^2\alpha) = 4L^2 - 4e^2\sin^2\alpha$ (positif car $L > e$)

d'où : $x = e\cos\alpha \pm \sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha}$ et, dans notre cas, $x = e\cos\alpha + \sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha}$.

Q3 : Déterminer la cylindrée du micromoteur.

$Cyl = S_{piston}\,c = \pi R_{piston}^2\,c = \pi \times 1{,}2^2 \times 2{,}2 = \boxed{9{,}95\,cm^3}$

> Les deux positions extrêmes du piston 3 (point mort haut et point mort bas) sont atteintes pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. On constate en représentant le mécanisme dans ces deux positions que le piston 3 se déplace d'une distance égale à deux fois la longueur de la manivelle 1 (vilebrequin). On a donc une course du piston 3 telle que : $c = 2 \times e = 22$ mm



Exercice 3.4 : **SYSTEMES D'ORIENTATION D'ANTENNE**

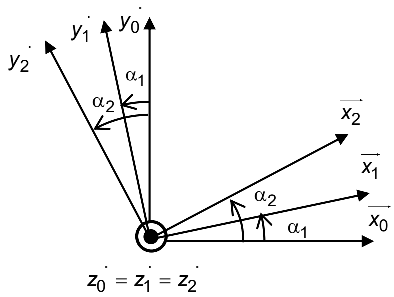
Q1 : Déterminer la loi entrée-sortie en position $d = f(\alpha_1)$ du système d'orientation d'antenne.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, soit : $L_1\,\vec{x}_1 - d\,\vec{y}_2 - L_0\,\vec{x}_0 = \vec{0}$

En projection sur la base de référence des angles :

$/\vec{x}_0$: $L_1\,\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_0 - d\,\vec{y}_2 \cdot \vec{x}_0 - L_0\,\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_0 = 0 \Rightarrow L_1\cos\alpha_1 + d\sin\alpha_2 - L_0 = 0$ (1)

$/\vec{y}_0$: $L_1\,\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 - d\,\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_0 - L_0\,\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_0 = 0 \Rightarrow L_1\sin\alpha_1 - d\cos\alpha_2 = 0$ (2)



> On cherche une loi entrée-sortie de type $d = f(\alpha_1)$, il faut donc éliminer α_2 (paramètre intermédiaire) de ces deux relations… On utilise la relation de trigonométrie $\boxed{\cos^2\cdots + \sin^2\cdots = 1}$. Ce qui nous donne dans notre cas :

$(1) \Rightarrow d\sin\alpha_2 = L_0 - L_1\cos\alpha_1$

$(2) \Rightarrow d\cos\alpha_2 = L_1\sin\alpha_1$

et $(1)^2 + (2)^2$ donne $d^2 = (L_0 - L_1\cos\alpha_1)^2 + (L_1\sin\alpha_1)^2 = L_0^2 + L_1^2\cos^2\alpha_1 - 2L_0L_1\cos\alpha_1 + L_1^2\sin^2\alpha_1$

$$= L_0^2 + L_1^2\left(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1\right) - 2L_0L_1\cos\alpha_1 = L_0^2 + L_1^2 - 2L_0L_1\cos\alpha_1$$

soit, avec $d > 0$: $\boxed{d = \sqrt{L_0^{\,2} + L_1^{\,2} - 2L_0\,L_1\cos\alpha_1}}$ (on suppose $L_0^{\,2} + L_1^{\,2} \geq 2L_0\,L_1$)