PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

CPGE 1re année

MPSI3-PCSI1

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

Caractériser le mouvement d'un solide par un torseur

Mécanique générale : cinématique du solide

C 06

2023-2024

https://www.s2i-chateaubriand-joliotcurie.net

Objectifs

Utiliser des démarches et des méthodes permettant de décrire et de caractériser les vitesses de tous les points des solides d'un système

Caractériser le mouvement d'un solide à l'aide d'un torseur cinématique

Sommaire

I Objectifs 3

II Déterminer la vitesse d'un point d'un solide 3
II.1 Rappels de cinématique du point : vitesse et dérivée temporelle d'un vecteur 3
II.2 Vecteur vitesse angulaire 4
II.3 Vitesse en un point d'un solide indéformable 5
II.4 Composition des vecteurs vitesses 6
II.5 Démarche de détermination des vecteurs vitesse en un point d'un solide 7

III Contraindre la cinématique d'un solide 9
III.1 Champ des vecteurs vitesse et torseur cinématique 9
III.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en rotation plane 10
III.3 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en translation 11
III.4 Déterminer et contraindre le torseur cinématique d'un solide 11
III.5 Composition des torseurs cinématiques 12

Quelques démonstrations 13

I Objectifs

En **robotique**, en plus de la position, la **vitesse** est contrôlée par les chaînes fonctionnelles.

L'objectif de ce cours est de définir des démarches et méthodes permettant de **caractériser** et piloter la **cinématique** de **solides indéformables**.

II Déterminer la vitesse d'un point d'un solide

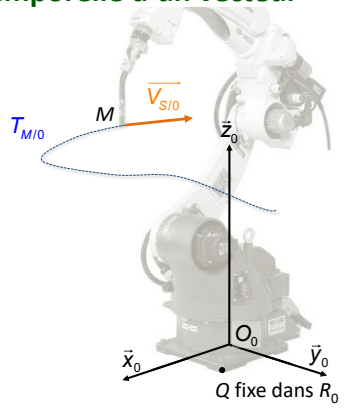
L'objectif de ce chapitre est de calculer une vitesse d'un point par la cinématique du solide, puis d'obtenir l'équation couplant les paramètres afin de contraindre sa norme ou sa direction.

II.1 Rappels de cinématique du point : vitesse et dérivée temporelle d'un vecteur

B_0 est la base de dérivation, pas la base d'expression du vecteur !

Le **vecteur vitesse** du point M, par rapport au solide de référence associé à $R_0(O_0,B_0)$, est la **dérivée temporelle d'un vecteur position** de M dans B_0 (1):

$$\overrightarrow{V_{M/0}} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{QM}}{dt}\right|_0 \text{ si } Q \text{ est fixe dans } R_0.$$



Le vecteur vitesse est **tangent à la trajectoire $T_{M/0}$.**

La norme s'exprime en m.s^{-1}.

(1) Et par dérivation du vecteur vitesse on obtient le vecteur accélération.

Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à une base

Par définition, la **dérivée temporelle d'un vecteur** $\vec{u}$ **par rapport à une base** $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ a pour coordonnées dans B_0 **les dérivées des coordonnées** de $\vec{u}$ dans B_0 :

$$\text{si } \vec{u} = x(t)\,\vec{x}_0 + y(t)\,\vec{y}_0 + z(t)\,\vec{z}_0 \text{ alors } \left.\frac{d\,\vec{u}(t)}{dt}\right|_0 = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{z}_0 \text{ (2)}$$

(2) si la définition est à connaître, nous ne l'utiliserons pas pour déterminer vitesses et accélérations !

Dans ces notations, l'indice 0 fait référence au référentiel 0, au repère R_0 ou à la base B_0 suivant le contexte.

Conséquences :

- Un **vecteur** $\vec{u}$ est **fixe** dans une base B_i

  $\Leftrightarrow$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans B_i sont **constantes** (indépendantes de t)

  $\Leftrightarrow \left.\frac{d\,\vec{u}}{dt}\right|_i = \vec{0}$

- Les vecteurs unitaires d'une base sont fixes dans cette base !

  Soit la base $B_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$, $\left.\frac{d\,\vec{x}_i}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\,\vec{y}_i}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\,\vec{z}_i}{dt}\right|_i = \vec{0}$

Par exemple, les coordonnées des vecteur unitaires d'une base B_i, exprimées dans cette même base sont : $\vec{x}_i(1,0,0)_{B_i}$, $\vec{y}_i(0,1,0)_{B_i}$, $\vec{z}_i(0,0,1)_{B_i}$. Les coordonnées sont bien des constantes indépendantes du temps.

- Un **point** M est **fixe** dans (0)

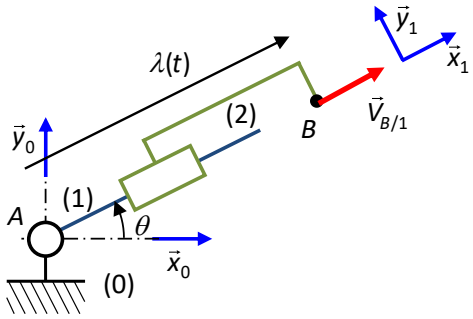
  $\Leftrightarrow$ les **coordonnées** dans B_0 d'un **vecteur position** de M dans R_0 sont **constantes** (indépendantes du temps)

  $\Leftrightarrow \vec{V}_{M/0} = \vec{0}$

Application : déterminer $\vec{V}_{B/1}$

Vecteur position de *B* dans (1) : $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\vec{x}_1$

$$\vec{V}_{B/1} = \left.\frac{d\,\lambda(t)\vec{x}_1}{dt}\right|_1 = \frac{d\,\lambda(t)}{dt}\vec{x}_1 + \lambda(t)\left.\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right|_1$$
$$= \dot{\lambda}\,\vec{x}_1$$



II.2 Vecteur vitesse angulaire

Le vecteur **vitesse angulaire** caractérise la rotation d'une base par rapport à une autre, et donc la rotation d'un solide par rapport à un autre. Sa norme est homogène à du rad/s.

Si une base (2) est en **rotation plane de direction** $\vec{z}$, **d'angle** $\alpha(t)$, par rapport à la base (1), le vecteur vitesse angulaire s'écrit :

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\alpha}\,\vec{z}$$

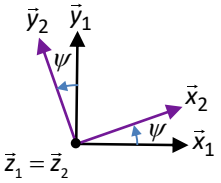
On pose aussi $\omega_{2/1}(t) = \dot{\alpha}(t)$

Propriétés : $\vec{\Omega}_{i/i} = \vec{0}$ $\quad$ $\vec{\Omega}_{i/j} = -\vec{\Omega}_{j/i}$

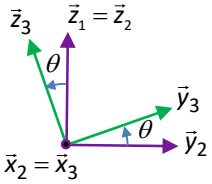
Composition des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}$

Application : sur les angles d'Euler

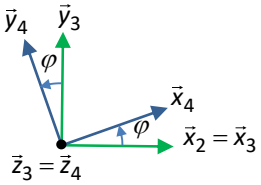
A1 - Compléter les figures avec les vecteurs vitesse angulaire.



$\vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$



$\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\theta}\,\vec{x}_2$



$\vec{\Omega}_{4/3} = \dot{\varphi}\,\vec{z}_3$

A2 - Déterminer le vecteur vitesse angulaire de 4/1.

Par composition des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{4/1} = \vec{\Omega}_{4/3} + \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\psi}\,\vec{z}_1 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\varphi}\,\vec{z}_2$

II.3 Vitesse en un point d'un solide indéformable

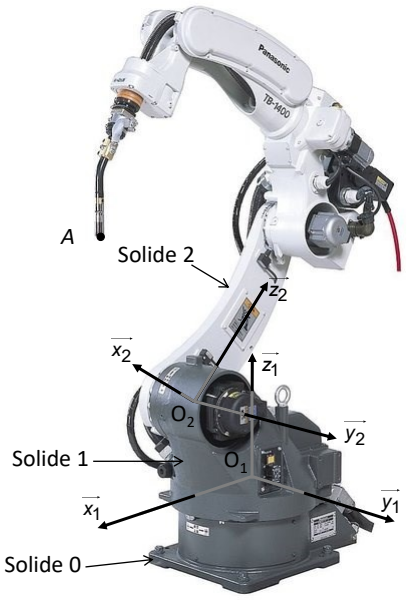
Considérons deux **solides indéformables** avec leurs repères liés, (2) et (1), et un point *A*, fixe ou mobile par rapport aux deux solides.

A chaque instant *t*, considérons le point *A'* fixe dans (2) coïncidant avec le point *A* à cet instant.

Par définition, on note : $\vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{A'/1}$, « vitesse de (2) para rapport à (1) en *A* ».

On note aussi : $\vec{V}_{A\in 2/1}$ « vitesse du point *A* appartenant à (2) par rapport à (1) »

Dans le cas général, $\vec{V}_{2/1}(A)$ n'est pas la vitesse du point *A* par rapport à (1). Il s'agit de la vitesse du point fixe dans (2), on dit aussi « appartenant à (2) », qui à la même position que *A* à l'instant considéré. Entre 2 instants, ce point peut changer.



Relation de Varignon et passage de la cinématique du point à la cinématique du solide

Démonstration en annexe

L'hypothèse d'indéformabilité permet de montrer les relations suivantes pour tout mouvement de (2), indéformable, par rapport à (1) :

Relation de Varignon : $\boxed{\vec{V}_{2/1}(B)=\vec{V}_{2/1}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}}$

Cinématique du **point** / cinématique du **solide** :

$\boxed{\vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{A/1}}$ si *A* fixe dans (2)

sinon $\vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{A/1}-\vec{V}_{A/2}$

Dans la relation de Varignon, le **vecteur vitesse angulaire** est celui associé aux **bases liées** aux solides (1) et (2), **nul si** les bases sont **fixes** l'une par rapport à l'autre (cas des translations).

Vitesse en un point d'un solide en rotation par rapport à un autre

Soit un solide (2) en **liaison pivot** ou en **rotation d'axe** $(A,\vec{u})$ par rapport à un solide (1).

En *A* ou **en tout point** *P* de **l'axe de rotation**, $\vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{2/1}(P)=\vec{0}$

Calcul de $\vec{V}_{2/1}(B)$ par la **relation de Varignon** en utilisant un **point de l'axe**.

Si l'on note *H* le projeté orthogonal de *B* sur l'axe de rotation.

Le résultat $\vec{V}_{2/1}(B)$ a les propriétés suivantes :

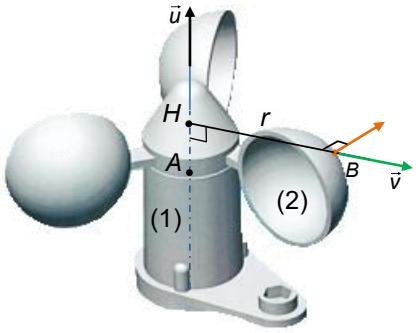
- $\left\|\vec{V}_{2/1}(B)\right\|=r\left|\omega_{2/1}\right|$ avec $r=HB$ la **distance** entre *B* et l'**axe de rotation** , « $V=R\omega$ »
- $\vec{V}_{2/1}(B)$ est **perpendiculaire au rayon** $\overrightarrow{HB}$ et à l'axe de rotation.

Démonstration :

Soit H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(A,\vec{u})$.

On note r la distance de B à la droite $(A,\vec{u})$: $r=\left\|\overrightarrow{HB}\right\|$.

En posant $\overrightarrow{HB}=r\,\vec{v}$, on peut écrire : $\overrightarrow{AB}=AH\,\vec{u}+r\,\vec{v}$.



(2) en liaison pivot d'axe $(A,\vec{u})$ par rapport à (1)

d'où $\vec{V}_{2/1}(B)=\underbrace{\vec{V}_{2/1}(A)}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{BA}\wedge\omega_{2/1}\,\vec{u}=-(AH\,\vec{u}+r\,\vec{v})\wedge\omega_{2/1}\vec{u}$

$=-AH\,\omega_{2/1}\underbrace{\vec{u}\wedge\vec{u}}_{\vec{0}}-r\,\omega_{2/1}\,\vec{v}\wedge\vec{u}$

$=r\,\omega_{2/1}\,\vec{u}\wedge\vec{v}$

Par le produit vectoriel, le vecteur vitesse est bien perpendiculaire à l'axe et au « rayon » et d'intensité proportionnelle à la distance à l'axe r.

Vitesse en un point d'un solide en translation à trajectoire rectiligne par rapport à un autre

Soit un solide (2) en **liaison glissière** ou en **translation** à trajectoire rectiligne de direction $\vec{x}_1$ par rapport à un solide (1), paramétrée par la distance $x(t)$.

> Le **vecteur rotation** de 2/1 est **nul**.
>
> Toutes les **vitesses** sont **identiques** : $\forall A,\ \vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{2/1}(O_2)=\left.\dfrac{d\,x(t)\vec{x}_1}{dt}\right|_1=\dfrac{d\,x(t)}{dt}\vec{x}_1$

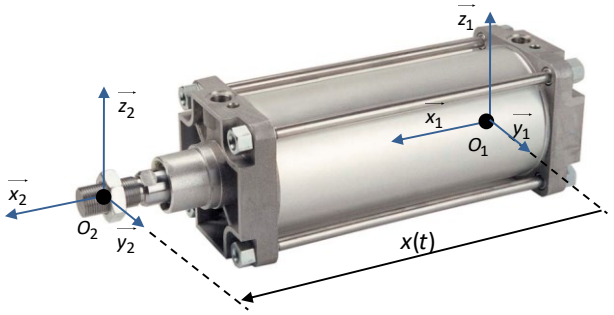
Démonstration :

$\vec{V}_{2/1}(O_2)=\vec{V}_{O_2/1}$ car O_2 fixe dans (2)

$=\left.\dfrac{d\,\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_1=\left.\dfrac{d\,x(t)\vec{x}_1}{dt}\right|_1$

$=\dfrac{d\,x(t)}{dt}\vec{x}_1+x(t)\underbrace{\left.\dfrac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right|_1}_{\vec{0}}$

$=\dfrac{d\,x(t)}{dt}\vec{x}_1$



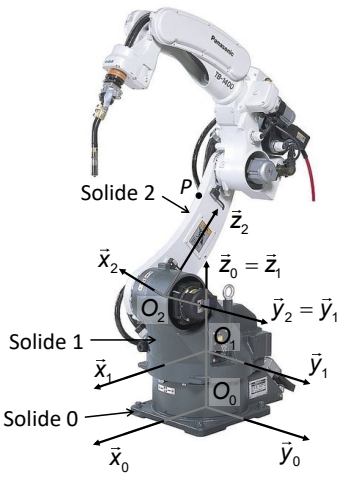
De plus, $\vec{V}_{2/1}(A)=\vec{V}_{2/1}(O_2)+\overrightarrow{AO_2}\wedge\vec{\Omega}_{2/1}=\vec{V}_{2/1}(O_2)+\overrightarrow{AO_2}\wedge\vec{0}=\vec{V}_{2/1}(O_2)$

Tous les vecteurs vitesses des points fixes de (2) sont identiques.

II.4 Composition des vecteurs vitesses

Soit un point P en mouvement par rapport à un solide (1) lui-même en mouvement par rapport à un solide (0).

> Relation de **composition des vitesses** en un même point :
>
> $$\vec{V}_{2/0}(P)=\vec{V}_{2/1}(P)+\vec{V}_{1/0}(P)$$
>
> Conséquence : $\vec{V}_{2/1}(P)=-\vec{V}_{1/2}(P)$



Cette relation de composition des vecteurs vitesse se généralise à ***n*** solides :

$$\vec{V}_{n/0}(P)=\vec{V}_{n/n-1}(P)+\cdots+\vec{V}_{1/0}(P)$$

II.5 Démarche de détermination des vecteurs vitesse en un point d'un solide

Principe : calculer la vitesse d'un point par la **cinématique du solide** en sommant les **vitesses** induites par les mouvements dans les **liaisons intermédiaires**.

Dans tous les cas, on s'attachera à :

- **laisser le résultat dans des bases différentes[1];**
- **vérifier que le résultat est bien homogène à une vitesse linéaire ($m \cdot s^{-1}$).**

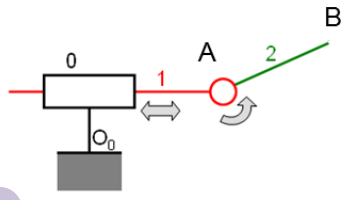
(1) On se contentera juste d'exprimer le résultat dans l'ordre croissant des bases puis dans l'ordre croissant des vecteurs unitaires :

$\vec{V}_{2/1}(p) = \cdots \vec{x}_1 + \cdots \vec{y}_1 + \cdots \vec{y}_2 + \cdots \vec{z}_2 + \cdots$

Exemple :

B est fixe dans le solide (2).

On recherche $\vec{V}_{2/0}(B)$.



Composition des vecteurs vitesse :

$$\overrightarrow{V_{2/0}}(B) = \overrightarrow{V_{2/1}}(B) + \overrightarrow{V_{1/0}}(B)$$

Si mouvement relatif de **rotation**

Varignon à partir d'un **point de l'axe** de rotation.

$$\overrightarrow{V_{2/1}}(B) = \cancel{\overrightarrow{V_{2/1}}(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

avec *A* sur l'axe de rotation de 2/1

Si mouvement relatif de **translation**

1) Rechercher le **point contrôlé** par le paramètre de position
2) Utiliser l'**égalité des vitesses** (Varignon) ;
3) puis la **cinématique du point** (ou Varignon)

$$\overrightarrow{V_{1/0}}(B) = \overrightarrow{V_{1/0}}(A) \quad (2)$$

$$= \vec{V}_{A/0} = \left. \frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt} \right|_0 \quad (3)$$

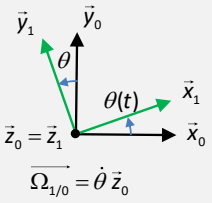
avec *A* fixe dans (1) et *O* fixe dans (0)

La relation de Varignon permet aussi d'utiliser un résultat intermédiaire connu.

En un point d'une liaison pivot, on peut « passer d'une pièce à l'autre ».

Cf deuxième application ci-dessous.

Exemple élémentaire 1 : cas d'un mouvement de **rotation**. Déterminer $\vec{V}_{B/0}$.



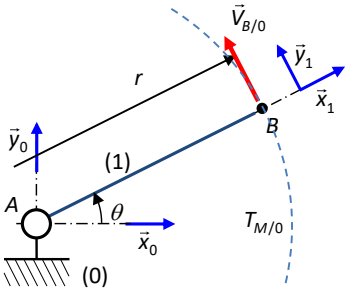
On note $\dot{\theta} = \omega$ et on suppose $\omega > 0$.

1/0 mouvement de rotation et *B* fixe dans (1).

d'où $\vec{V}_{B/0} = \vec{V}_{1/0}(B)$

$$= \cancel{\vec{V}_{1/0}(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= \vec{0} - r\,\vec{x}_1 \wedge \omega\,\vec{z}_1 = r\,\omega\,\vec{y}_1$$



On obtient : $\vec{V}_{B/0} = r\,\omega\,\vec{y}_1$. Vecteur vitesse perpendiculaire au rayon AB et proportionnel (en norme) à la longueur du rayon et à la vitesse angulaire.

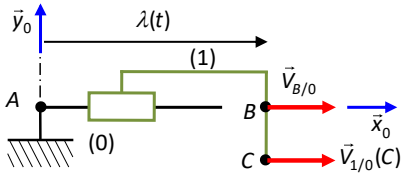
Exemple élémentaire 2 : cas d'un mouvement de **translation**. Déterminer $\vec{V}_{1/0}(C)$.

On note $\dot{\lambda}=v$ avec $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{x}_0$ et on suppose $v>0$.

1/0 mouvement de translation.

d'où $\vec{V}_{1/0}(C)=\vec{V}_{1/0}(B)$

$$=\vec{V}_{B/0}=\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\,\lambda(t)\vec{x}_0}{dt}\right|_0=\dot{\lambda}\vec{x}_0=v\vec{x}_0$$



Vecteur vitesse colinéaire à la direction de la liaison glissière.

Application : bras manipulateur. Déterminer $\vec{V}_{B/0}$.

$\vec{V}_{B/0}=\vec{V}_{2/0}(B)$ car *B* fixe dans (2)

$=\vec{V}_{2/1}(B)+\vec{V}_{1/0}(B)$

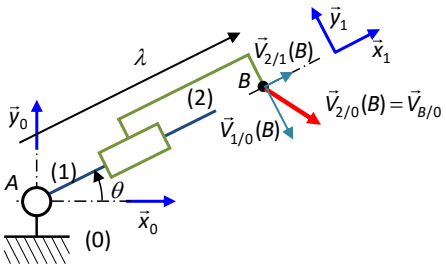
- 2/1 mouvement de translation

$$\vec{V}_{2/1}(B)=\vec{V}_{B/1}=\left.\frac{d\,\lambda\vec{x}_1}{dt}\right|_1=\dot{\lambda}\vec{x}_1$$

- 1/0 mouvement de rotation

$$\vec{V}_{1/0}(B)=\vec{V}_{1/0}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$$
$$=\vec{0}-\lambda\vec{x}_1\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1=\lambda\dot{\theta}\vec{y}_1$$

d'où : $\vec{V}_{B/0}=\dot{\lambda}\vec{x}_1+\lambda\dot{\theta}\vec{y}_1$, relation homogène à m.s^{-1}.



Application : le mécanisme en parallélogramme impose un mouvement de translation à trajectoire circulaire à (2) par rapport à (0). Déterminer $\vec{V}_{2/0}(B)$ et $\vec{V}_{2/0}(C)$.

On pose $\overrightarrow{AB}=R\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{BC}=a\vec{x}_0-b\vec{y}_0$. On suppose $\omega=\dot{\theta}<0$.

1/0 mouvement de rotation

$\vec{V}_{2/0}(B)=\cancel{\vec{V}_{2/1}(B)}+\vec{V}_{1/0}(B)$

$=\vec{V}_{1/0}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}$

$=\vec{0}-R\vec{x}_1\wedge\omega\vec{z}_1=R\omega\vec{y}_1$

2/0 mouvement de translation (*B* est le point contrôlé)

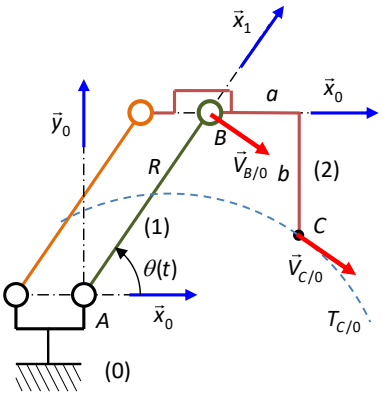
$\vec{V}_{2/0}(C)=\vec{V}_{2/0}(B)$

$=\cancel{\vec{V}_{2/1}(B)}+\vec{V}_{1/0}(B)$

$=\vec{V}_{1/0}(B)$

$=\cdots$

$=R\omega\vec{y}_1$



Dans ce deuxième cas, c'est la relation de Varignon qui est utilisée, pas la dérivée d'un vecteur position.

On remarque que $\vec{V}_{2/0}(C)=\vec{V}_{2/0}(B)$, propriété liée au mouvement de translation : les vitesses des points d'un solide en translation par rapport à un autre sont identiques.

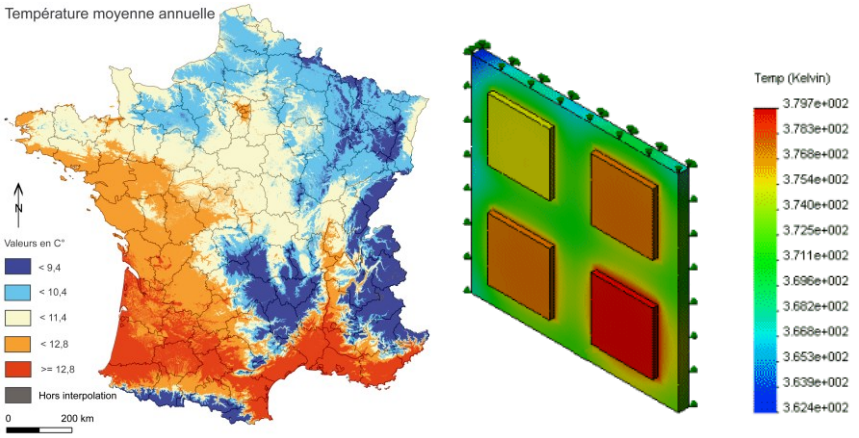
III Contraindre la cinématique d'un solide

III.1 Champ des vecteurs vitesse et torseur cinématique

Un champ ?

Un champ est une application qui, à tout point d'un **domaine géométrique**, associe une **grandeur physique**. Les champs permettent de **caractériser l'état du système** étudié.

Sont ainsi définis des champs des pressions (grandeur scalaire), des températures (scalaire), des déplacements (vectoriel), de champ magnétique (vectoriel)…

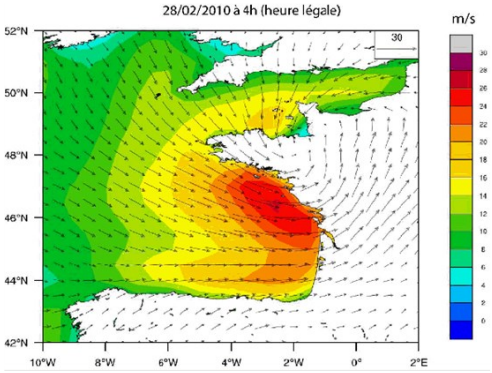


Champ des températures en moyenne annuelle pour la France (géométrie plane) et champ des températures stabilisées d'une carte électronique (géométrie 3D)

Champ de vecteurs : application d'un espace affine de dimension 3 (ou 2 pour une géométrie plane), dans l'espace vectoriel associé

$$P \in \mathcal{E} \xrightarrow{\vec{M}} \vec{M}(P) \in E$$

En tout point P du **domaine d'étude** est associé un vecteur $\vec{M}(P)$.



Vecteurs vitesse du vent lors de la tempête Xynthia

Champ des vecteurs vitesse d'un solide indéformable

Le **champ des vecteurs vitesse** d'un solide (2) par rapport à un solide (1) est l'ensemble des **vecteurs vitesses des points fixes** du solide (2) par rapport au solide (1).

Ces points peuvent être matériels(1), ou non.

$$P \in \mathcal{E} \longrightarrow \vec{V}_{2/1}(P)$$

(1) un point matériel représente un élément de matière suffisamment petit. Un point matériel est donc, par définition, fixe dans le repère lié d'un solide indéformable.

Torseur cinématique

Si un **champ vectoriel** vérifie une relation identique à la relation de Varignon, soit s'il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que $\forall A,B,\ \vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$, ce champ est appelé **torseur**. $\vec{R}$ est la résultante.

Le **champ des vecteurs vitesses** d'un solide **indéformable** (2) par rapport à (1) est appelé **torseur cinématique** de (2) par rapport à (1), noté(2) :

$$\{V_{2/1}\}$$

(2) On trouvera aussi les notations : $\mathcal{V}_{2/1}$, $\mathcal{V}(2/1)$, $\{V(2/1)\}$

Grâce à la relation de Varignon, le **torseur cinématique** de (2) par rapport à (1) est **entièrement défini** par :

- le **vecteur vitesse angulaire** de (2) / (1) (résultante cinématique)
- la **vitesse** en un point de (2) / (1)
- le **point** auquel la vitesse est connue, point quelconque mais défini.

d'où la notation : $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{2/1}}(A) \end{Bmatrix}_A$

III.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en rotation plane

Les résultats sont une conséquence directe du chapitre II.

Soit un solide (2) en **rotation d'axe** $(A,\vec{u})$ par rapport à un solide (1), le **torseur cinématique** s'écrit : $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{2/1}\,\vec{u} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

Propriétés :

- en tout **point *I* de l'axe de rotation**, la **vitesse relative est nulle**(1), $\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{0}$
- les **vecteurs vitesses** sont **perpendiculaires aux « rayons »** et à l'axe de rotation
- **l'intensité** des vecteurs vitesse est **proportionnelle** à la **distance à l'axe** et à la **vitesse angulaire**. Si *M* est à une distance *r* de l'axe : $\left\|\overrightarrow{V_{2/1}}(M)\right\| = r\left|\omega_{2/1}\right|$

(1) les points de l'axe de rotation sont fixes dans les 2 pièces.

I fixe dans (2) :

$\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{V}_{I/1}$

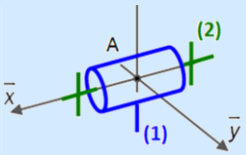
I fixe dans (1) :

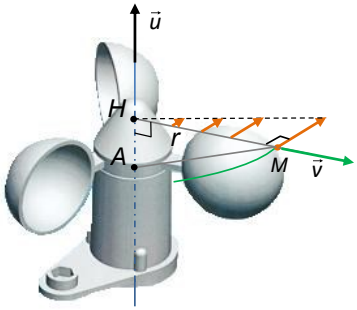
$\vec{V}_{I/1} = \vec{0}$

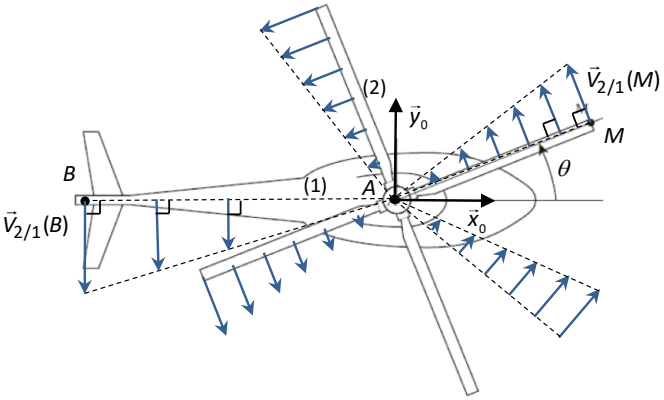
d'où $\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{0}$

Si un ensemble (2) est en **liaison pivot d'axe** $(A,\vec{x})$ par rapport à un ensemble (1), **paramétrée** par un **angle** $\alpha(t)$, le **torseur cinématique** s'écrit :

$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$







Champ des vecteurs vitesses de la turbine par rapport au socle **Champ des vecteurs vitesses de l'hélice (2) par rapport au fuselage (1)**

III.3 Champ des vecteurs vitesse d'un solide en translation

Soit un solide (2) en **translation de direction** $\vec{u}$ par rapport à un solide (1), le **torseur cinématique** s'écrit : $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{2/1}\,\vec{u} \end{Bmatrix}_*$

Propriétés :

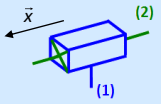
- le **champ des vitesses est uniforme**(1), colinéaire à la direction du mouvement :

$$\forall M,\ \overrightarrow{V_{2/1}}(M) = v_{2/1}\,\vec{u}$$

- le **vecteur vitesse angulaire** est **nul** : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$

Si un ensemble (2) est en **liaison glissière de direction** $\vec{x}$ par rapport à un ensemble (1), **paramétrée** par la **distance** $\lambda(t)$, le **torseur cinématique** s'écrit :

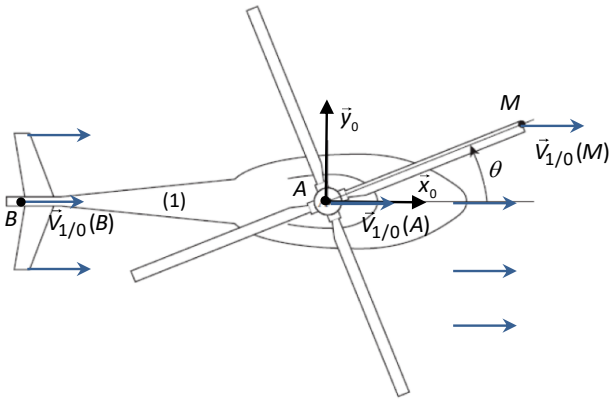
$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\,\vec{x} \end{Bmatrix}_*$$



(1) la relation de Varignon donne : $\forall A,B$,

$$\vec{V}_{B\in 2/1} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$
$$\vec{0}$$
$$= \vec{V}_{A\in 2/1}$$

Le champ est uniforme (même valeur en tout point).



Champ des vecteurs vitesses du fuselage (1) par rapport au sol (0) pour un mouvement de translation de direction $\vec{x}_0$

III.4 Déterminer et contraindre le torseur cinématique d'un solide

Démarche pour déterminer $\{V_{3/0}\}$ **directement** :

si (3) est en **liaison pivot** ou **glissière** par rapport à (0), poser le résultat directement

sinon :

– déterminer le **vecteur vitesse angulaire par composition** :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

– **rechercher un point fixe** de (3), le « plus **proche** » possible de la **référence**. **Déterminer la vitesse en ce point**.

Soit un mouvement particulier défini par un torseur $\{V_{3/0\ \text{imposé}}\}$.

Soit $\{V_{3/0}\}$ déterminé en fonction des paramètres de position et de leurs dérivées.

La **contrainte** sur le mouvement d'un solide (3)/(0) s'écrit : $\{V_{3/0}\} = \{V_{3/0\ \text{imposé}}\}$

Cette équation donne **2 équations vectorielles** :

- égalité des vecteurs vitesse angulaire : $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/0\ imposé}$
- égalité des vecteurs vitesse **en un même point**, à choisir : $\vec{V}_{B\in 3/0} = \vec{V}_{B\in 3/0\ imposé}$

Soit **6 équations scalaires** en tout.

III.5 Composition des torseurs cinématiques

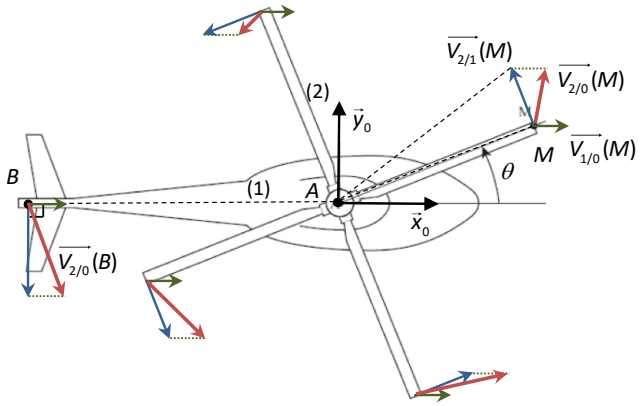
La relation de composition des torseurs cinématiques se déduit des relations de composition des vecteurs vitesses et des vecteurs vitesses angulaires.

Relation de **composition des torseurs cinématiques** dans le cas de ***n*** solides :

$$\{V_{n/0}\} = \{V_{n/n-1}\} + \cdots + \{V_{1/0}\}$$

La résultante est la somme des résultantes et la vitesse est la somme des vitesses en un même point.

Conséquence : $\boxed{\{V_{2/1}\} = -\{V_{1/2}\}}$



Composition des champs des vitesses de 2/1, 1/0 et 2/0 : $\{V_{2/0}\} = \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$

Quelques démonstrations

Les démonstrations s'appuient sur la formule de Bour, formule qui permet de changer la base de dérivation d'un vecteur : $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{u}$.

La démonstration de cette formule, qui permet aussi de définir le vecteur rotation et la relation de composition des vecteurs rotation, est donnée dans un document complémentaire.

Relation de Varignon

Considérons un point *A*, fixe ou mobile par rapport à deux solides indéformables (1) et (0), chacun associé à son repère lié, d'origines respectives O_0 et O_1 .

Considérons le point A' , fixe dans (1), coïncidant avec *A*, à l'instant *t*.

Par définition, $\boxed{\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{A'/0}} = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1A'}\right)}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A'}}{dt}\right|_0$

La première dérivée est la vitesse de l'origine O_1 par rapport à (0) : $\left.\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right|_0 = \vec{V}_{O_1/0}$

En changeant la base de dérivation, la deuxième dérivée donne : $\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A'}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A'}}{dt}\right|_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1A'}$.

Par définition A' est fixe dans (1), d'où $\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A'}}{dt}\right|_1 = \vec{V}_{A'/1} = \vec{0}$.

Toujours par définition, A' est coïncidant avec *A* : $\overrightarrow{O_1A'} = \overrightarrow{O_1A}$.

On obtient ainsi une autre définition du vecteur vitesse en *A* : $\boxed{\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{O_1/0} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}}$

De même, pour un point *B* : $\vec{V}_{1/0}(B) = \vec{V}_{O_1/0} + \overrightarrow{BO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

La soustraction des deux expressions donne : $\vec{V}_{1/0}(B) - \vec{V}_{1/0}(A) = \cancel{\vec{V}_{O_1/0}} + \overrightarrow{BO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} - \cancel{\vec{V}_{O_1/0}} - \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

$$= \left(\overrightarrow{BO_1} - \overrightarrow{AO_1}\right) \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

soit : $\boxed{\vec{V}_{1/0}(B) = \vec{V}_{1/0}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}}$, relation de Varignon.

Cinématique du solide / cinématique du point

En suivant la même démarche :

$$\vec{V}_{A/0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0A}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1A}\right)}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_0 = \vec{V}_{O_1/0} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_0$$

La formule de Bour permet d'écrire : $\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right|_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \vec{V}_{A/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \vec{V}_{A/1} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$

En remplaçant, on obtient : $\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{O_1/0} + \vec{V}_{A/1} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$ (i)

$$= \vec{V}_{A/1} + \vec{V}_{O_1/0} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

Or, dans la démonstration précédente, nous avons trouvé : $\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{O_1/0} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$.

En remplaçant dans (i), on obtient : $\vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{A/1} + \vec{V}_{1/0}(A)$, soit : $\boxed{\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{A/0} - \vec{V}_{A/1}}$

On retrouve la condition de passage de la cinématique du solide à la cinématique du point :
$\vec{V}_{1/0}(A) = \vec{V}_{A/0}$ si $\vec{V}_{A/1} = \vec{0}$, c'est-à-dire, si *A* fixe dans (1).

Savoirs

Je connais :

- ☐ les particularités du champ des vitesses associés à une translation
- ☐ les particularités du champ des vitesses associés à une rotation
- ☐ la relation de Varignon
- ☐ les relations de composition des vecteurs vitesse et vecteurs vitesse angulaire
- ☐ la relation de composition des torseurs cinématiques
- ☐ les démarches de calcul des vitesses et de détermination des torseurs cinématiques

Savoir-faire

Je sais :

- ☐ réaliser le produit vectoriel entre deux vecteurs unitaires
- ☐ exprimer un vecteur vitesse angulaire
- ☐ déterminer le vecteur vitesse d'un point d'un solide

- ☐ déterminer le vecteur vitesse en un point d'un solide en rotation ou en translation par rapport à un autre
- ☐ déterminer le torseur cinématique d'un solide en rotation ou translation
- ☐ déterminer les relations scalaires associées à une contrainte sur une trajectoire, une vitesse ou un mouvement