

# CARACTERISER LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE PAR UN TORSEUR

**C 06**

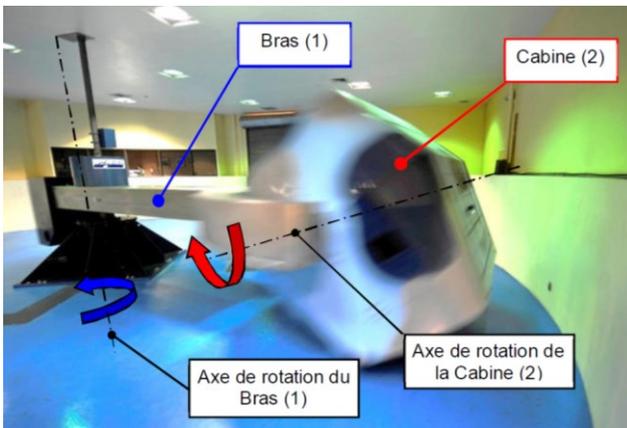
TD 1 : Contraindre une vitesse ..... 1  
 TD 2 : Imposer un mouvement – torseur cinématique..... 5  
 Éléments de réponse ..... 11

## TD 1 : CONTRAINDRE UNE VITESSE

### Exercice 1.1 : CENTRIFUGEUSE

Les pilotes de chasse subissent lors de leurs missions des accélérations bien supérieures à celle subie du fait du seul champ de gravité terrestre. Un pilote en virage serré à grande vitesse ressentira jusqu'à 12 g (g : l'accélération de la pesanteur) contre 5 g pour un pilote de formule 1 (relevé dans le virage de l'Eau Rouge à Spa), et 1 g pour toute personne sur Terre au niveau de la mer.

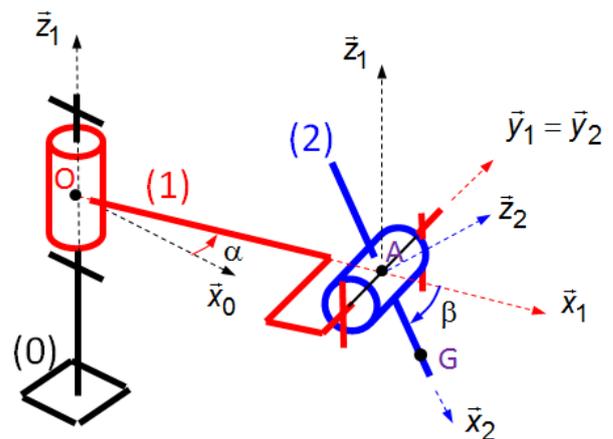
Une  
Avec  
vision  
est due  
effets  
Afin de  
centres  
de



personne normale s'évanouie entre 4 et 6 g. l'augmentation de l'accélération, les premiers effets ressentis sont visuels : perte de la vision des couleurs, suivie par la vision en tunnel (vision périphérique perdue), puis la perte complète de la tandis que la conscience demeure. Pour de plus grandes accélérations, la perte de conscience subite à un manque d'oxygénation du cerveau lorsque les d'inertie empêchent le sang de l'irriguer. familiariser et de tester les pilotes à ces effets, les d'entraînement ont mis au point des systèmes expérimentaux au sol capables de les soumettre à telles accélérations : les centrifugeuses.

La centrifugeuse étudiée est principalement constituée d'un bras d'entraînement (1) et d'une cabine (2) pour accueillir la personne subissant le test.  
 La position angulaire de la cabine (2) est asservie par rapport au bras (1) afin d'imposer à la personne subissant le test quatre positions principales : tête « en haut », tête « en bas », accélération de face ou de dos.  
 Sur le schéma cinématique, la direction  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  est verticale ascendante. On note G le centre de gravité de la cabine (2).

$\vec{OA} = a \vec{x}_1$  avec  $a = 3\text{ m}$   
 $\vec{AG} = b \vec{x}_2$  avec  $b = 1\text{ m}$

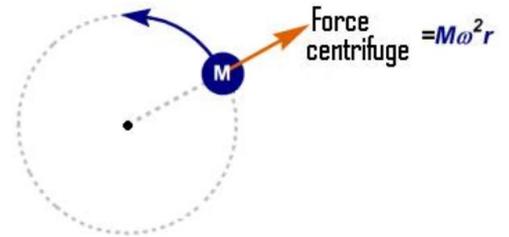


- Q1 :** Réaliser les figures d'analyses.
- Q2 :** Déterminer  $\vec{v}_{2/0}(G)$ . Vérifier l'homogénéité. Tracer sur le schéma cinématique les vecteurs vitesses intermédiaires.
- Q3 :** Déterminer les produits vectoriels suivants :  $\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0$ ,  $\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_2$ ,  $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0$ ,  $\vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0$ ,  $\vec{x}_2 \wedge \vec{z}_0$ ,  $\vec{x}_0 \wedge \vec{x}_2$  et  $\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_2$ .

En dérivant le vecteur vitesse et dans le cas où  $\beta$  est constant, on obtient le vecteur le vecteur accélération  $\vec{a}_{G/0}$  suivant :

$$\vec{a}_{G/0} = -\dot{\alpha}^2 (b \cos \beta + a) \vec{x}_1 + \ddot{\alpha} (b \cos \beta + a) \vec{y}_1$$

L'expression force centrifuge, ou accélération centrifuge, est une force apparente qui s'explique par un effet de déportation d'un corps en rotation vers l'extérieur de la courbe. C'est ce même effet qui donne la sensation d'éjection latérale à un pilote dans une courbe.



Cette force s'écrit  $\overline{F_{centrifuge}} = -M \vec{a}_{G/0}$  lorsque la vitesse angulaire est constante.

Dans notre cas, on bloque la cabine (2) dans sa position verticale par rapport au bras (1) ( $\beta = 90^\circ$ ). La vitesse angulaire du bras (1) par rapport au socle (0) est constante.

**Q4 :** Calculer la vitesse angulaire en tour par minute du bras (1) donnant une accélération équivalente à 9 g.

### Exercice 1.2 : HOMOGENEITE

On suppose que  $a, b, c, R$  et  $\ell$  sont des distances, que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres de position angulaire et  $x$  un paramètre de position linéaire (une distance).

**Q1 :** Déterminer les expressions homogènes à une vitesse (m/s).

$$R \dot{\alpha} \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_2 - \ell \dot{\beta} \vec{z}_3$$

$$R \dot{\alpha} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{y}_2 - \ell \dot{\beta} \vec{z}_3$$

$$R \dot{\alpha} \vec{x}_2 + \ell \dot{\alpha}^2 \cos \beta \vec{y}_2 - \ell^2 \dot{\beta} \vec{z}_3$$

$$a \dot{\alpha} \cos \alpha - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\alpha + \beta)$$

$$\dot{x} - a \dot{\alpha} \sin \alpha - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin(\alpha + \beta)$$

$$\dot{x} \dot{\alpha} \sin \alpha - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin(\alpha + \beta)$$

$$x \dot{\alpha} \sin \alpha - b(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin(\alpha + \beta)$$

### Exercice 1.3 : UNITE DE DECOUPE DE SAVONS

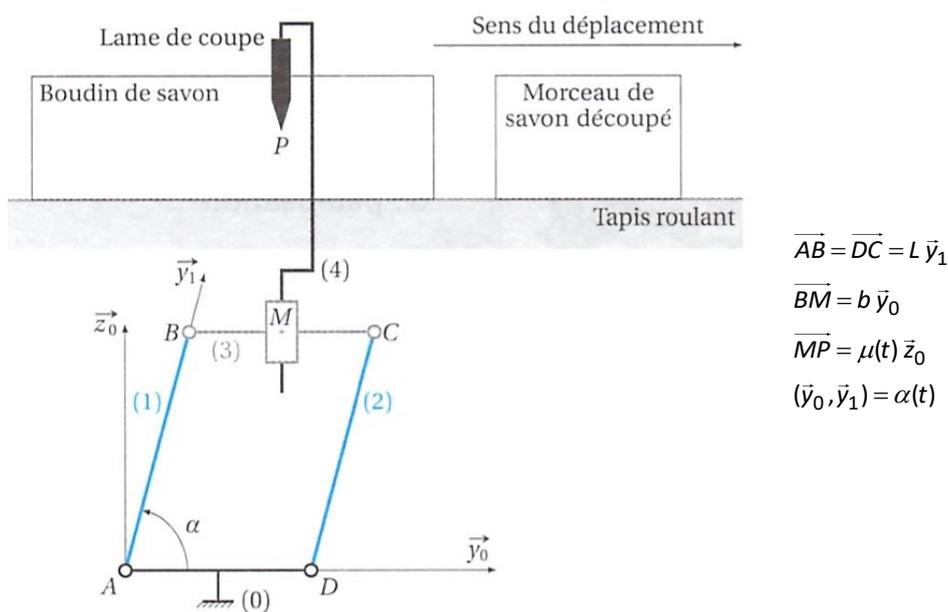
Le système étudié est un sous-ensemble d'une ligne de production de savon réalisant la découpe, à la volée, des morceaux de savon à la taille souhaitée.

L'objectif est de coordonner les mouvements de la lame 4 et du savon afin d'assurer une coupe droite.

Le mode opératoire de découpe est le suivant :

- au départ, la **lame de coupe** 4 est en dehors du boudin de savon (la pièce 4 est complètement sortie) et les bras 1 et 2 sont verticaux, de direction  $\vec{z}_0$  ;
- le vérin de coupe, non représenté sur le schéma cinématique plan, est alimenté en air comprimé ce qui provoque la descente de la lame 4 par rapport à 3 et son engagement dans le boudin de savon (paramètre  $\mu(t)$ ) ;
- dès le début de cet engagement, la lame 4 est entraînée horizontalement par le boudin, ce qui provoque la déformation du quadrilatère ABCD (paramètre  $\alpha(t)$ ) ;
- lorsque la lame 4 a traversé le boudin de savon, le vérin de coupe est alimenté pour provoquer la remontée de la lame 4 puis l'ensemble est replacé en position initiale.

Plus d'informations sur les vérins dans le dossier multimédia « Constituants usuels / Les actionneurs / Les vérins pneumatique ou hydraulique » du site de SII. [Accès direct ici](#).



On considère le modèle cinématique plan ci-dessus.  $\vec{x}_0$  est un vecteur commun à toute les bases.

- Q1 :** Préciser le mouvement de 3/0. Réaliser la figure de changement de base associée au paramètre  $\alpha$  et préciser le vecteur vitesse angulaire.
- Q2 :** Déterminer l'expression littérale de  $\vec{v}_{P/0}$ . Vérifier l'homogénéité du résultat ( $m \cdot s^{-1}$ ). Tracer sur le schéma cinématique les vecteurs vitesses intermédiaires.

Le boudin de savon se déplace, sur un convoyeur, en translation de direction  $\vec{y}_0$  par rapport au bâti 0 avec une vitesse  $V_s$ ,  $V_s > 0$ . Lorsque la lame 4 s'engage dans le savon, elle est immédiatement entraînée par le boudin.

- Q3 :** Sous quelle condition la coupe du savon sera droite ? Exprimer la condition sur la vitesse de P/0 et en déduire une condition sur  $\alpha$ .
- Q4 :** Déterminer  $\alpha(t)$ , sachant qu'à l'instant initial  $t=0$  où la lame 4 entre en contact avec le savon,  $\alpha(0) = 90^\circ$ .

## Exercice 1.4 : ROBOT DE PEINTURE

On étudie un robot de peinture de carrosserie de voiture. L'objectif est de déterminer une loi de pilotage permettant au pistolet à peinture de balayer horizontalement la carrosserie tout en vérifiant le critère de déplacement relatif. Dans le modèle proposé, le point  $P$  correspond à la position du pistolet.



Exigences techniques	Critère	Niveau
1.7	Vitesse de déplacement relatif	Vitesse constante

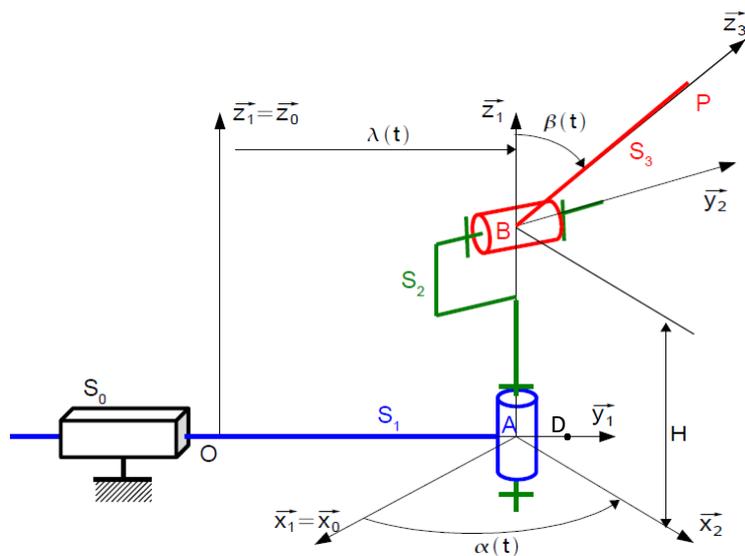
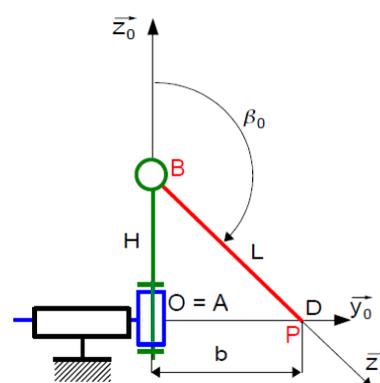
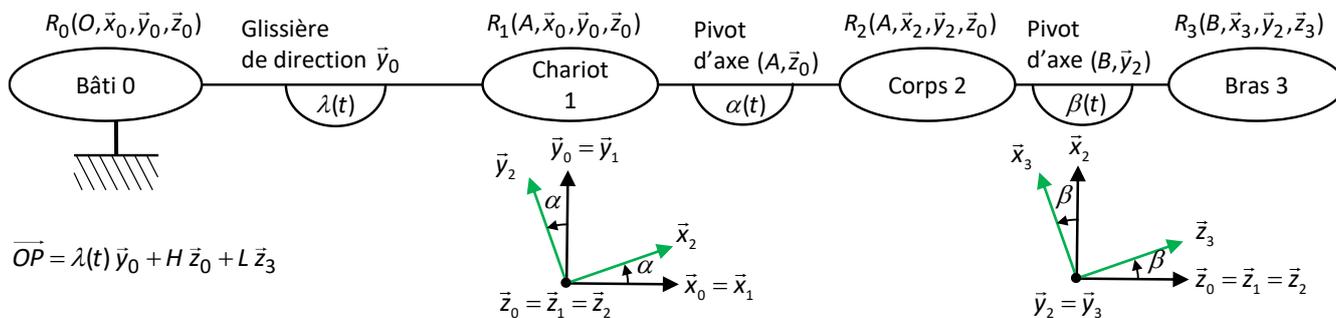


Schéma cinématique du robot



Position médiane (P est en D)  
(et A en O)



$$\vec{OP} = \lambda(t) \vec{y}_0 + H \vec{z}_0 + L \vec{z}_3$$

**Q1 :** Exprimer les vecteurs vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_{1/0}$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1}$  et  $\vec{\Omega}_{3/2}$ . En déduire  $\vec{\Omega}_{2/0}$  et  $\vec{\Omega}_{3/0}$ .

**Q2 :** Déterminer  $\vec{V}_{P/0}$ .

**Q3 :** Exprimer la relation vectorielle associée à la condition «  $P$  se déplace à une vitesse  $V$  suivant  $\vec{x}_0$  ». Par projection sur  $\vec{z}_0$ , en déduire  $\dot{\beta}$ .

**Q4 :** Projeter la contrainte vectorielle de la question précédente sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  pour obtenir les 2 autres contraintes scalaires.

**Q5 :** Exprimer alors  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$  en fonction de  $L$ ,  $V$ ,  $\alpha$  et  $\beta_0$ .

En notant que  $\sin(\pi - \beta_0) = \sin(\beta_0) = \frac{b}{L}$ , les expressions déterminées permettent d'obtenir les deux équations :  $\dot{\lambda} = V / \tan \alpha$  et  $\dot{\alpha} = -V / (b \sin \alpha)$ . Elles s'intègrent facilement numériquement pour obtenir les lois de pilotage du robot.

## TD 2 : IMPOSER UN MOUVEMENT – TORSEUR CINEMATIQUE

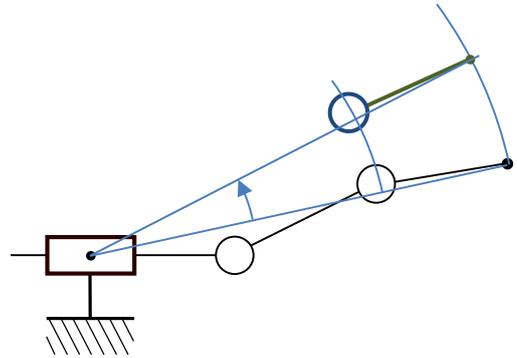
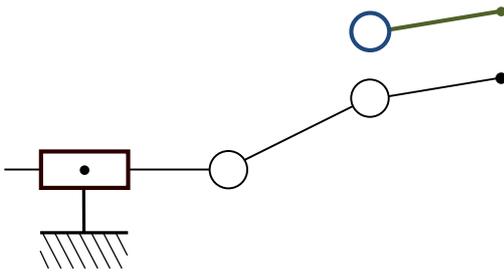
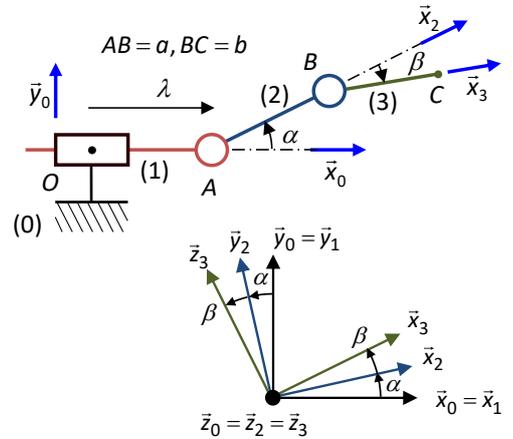
### Exercice 2.1 : ROBOT 3 AXES

On considère le modèle ci-contre. Le vecteur commun est  $\vec{z}_0$ .

**Q1 :** Déterminer directement les torseurs cinématiques de 1/0, 2/0 et 3/0 (sans tenir compte des résultats précédents).

**Q2 :** Les figures ci-dessous représentent le système dans sa configuration initiale et l'ensemble (3) après un mouvement de rotation ou un mouvement de translation. Indiquer le mouvement correspondant pour chaque figure en le précisant. Compléter les figures.

Définir les torseurs cinématiques associés à ces mouvements en les paramétrant par  $v$  (m/s) et  $\omega$  (rad/s).



**Q3 :** On souhaite que le mouvement de (3)/(0) corresponde à  $\left\{V_{3/0\text{ imposé}}\right\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_{\text{imposé}} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ . Écrire les équations vectorielles et scalaires associées à cette contrainte.

Si l'on suppose les paramètres de position connus à un instant  $t$ , le système d'équations permet aisément de calculer les paramètres

cinématiques successivement avec le système :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega_{\text{imposé}} \frac{\lambda + a \cos \alpha}{a \cos \alpha} \\ \dot{\beta} = \omega_{\text{imposé}} - \dot{\alpha} \\ \dot{\lambda} = a \sin \alpha (\dot{\alpha} - \omega_{\text{imposé}}) \end{cases}$$

La résolution numérique de ces équations est abordée en physique et SI.

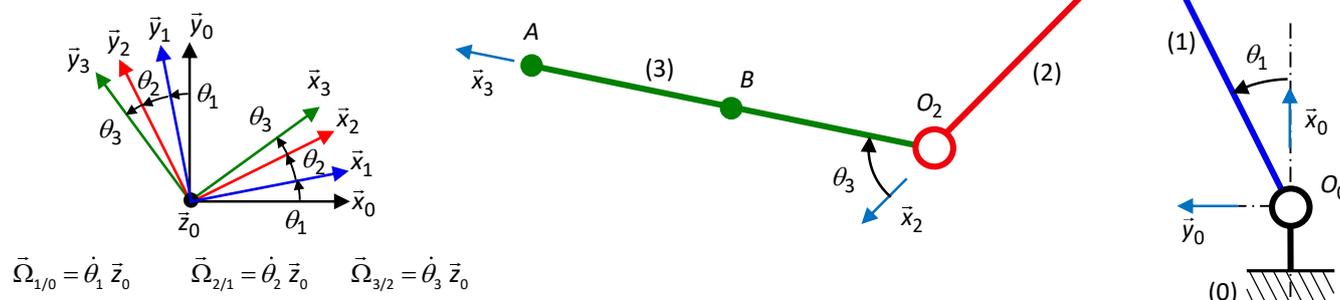
## Exercice 2.2 : ROBOT RAMASSEUR DE FRUITS

On étudie un robot ramasseur de fruits. Il permet à un agriculteur de cueillir, de manière automatique, les fruits mûrs dans les arbres et de les mettre dans un conteneur spécifique.

Le vecteur  $\vec{z}_0$  est commun à toutes les bases.

$$O_0O_1 = O_1O_2 = R$$

$$O_2A = L$$



**Q1 :** Déterminer le torseur cinématique  $\{V_{3/0}\}$  en fonction des paramètres de position et des dimensions du mécanisme.

On souhaite piloter le bras (3) de telle sorte qu'il suive, par rapport à la base (0), les mouvements décrits dans le tableau ci-dessous :

	Mouvement 1	Mouvement 2	Mouvement 3
Mouvements imposés :	translation à trajectoire rectiligne de direction $+\vec{x}_0$ à vitesse $V$ constante	de rotation d'axe $(A, \vec{z}_0)$ à vitesse angulaire constante $\omega_2$	de rotation d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ à vitesse angulaire constante $\omega_3$
Vitesse des mouvements :	30 cm en 2 s	Rotation de $+30^\circ$ en 2 s	Rotation à vitesse angulaire constante $N = -5$ tr/mn
Torseur associé :	$\{V_{3/0}\}_t$	$\{V_{3/0}\}_{r1}$	$\{V_{3/0}\}_{r2}$

**Q2 :** Exprimer les torseurs  $\{V_{3/0}\}_t$ ,  $\{V_{3/0}\}_{r1}$  et  $\{V_{3/0}\}_{r2}$  de chacun des mouvements imposés ainsi que les valeurs numériques de  $V$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ .

**Q3 :** Représenter, sur les figures 1, 2 et 3, pour chacun des mouvements, les vecteurs vitesses  $\vec{V}_{3/0}(O_2)$ ,  $\vec{V}_{3/0}(B)$  et  $\vec{V}_{3/0}(A)$ . Pour chaque figure, le vecteur vitesse ayant la norme la plus grande est représenté par un vecteur de 2 cm.

**Q4 :** Déterminer les relations scalaires sur les paramètres cinématiques et de position pour obtenir le mouvement 1. Intégrer les relations obtenues.

**Q5 :** Déterminer les relations scalaires sur les paramètres cinématiques et de position pour obtenir le mouvement 3.

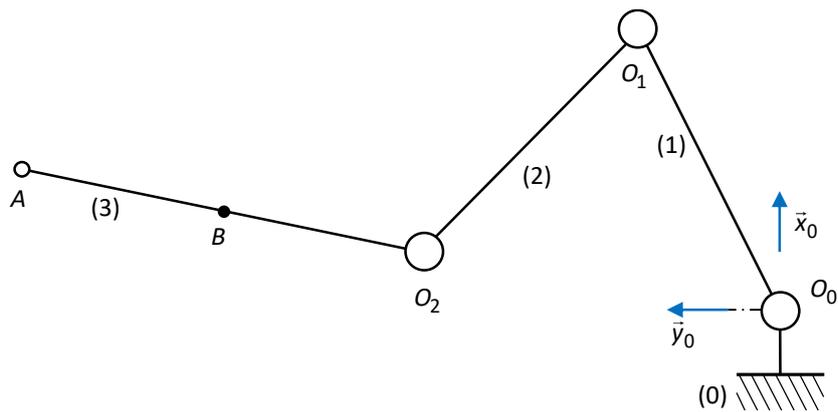


Figure 1

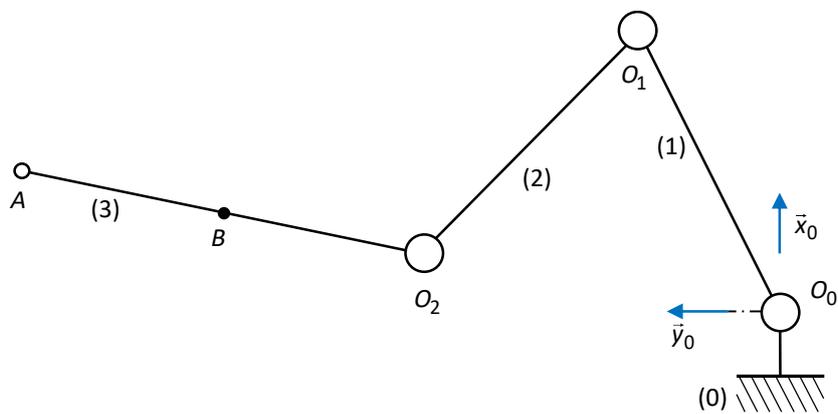


Figure 2

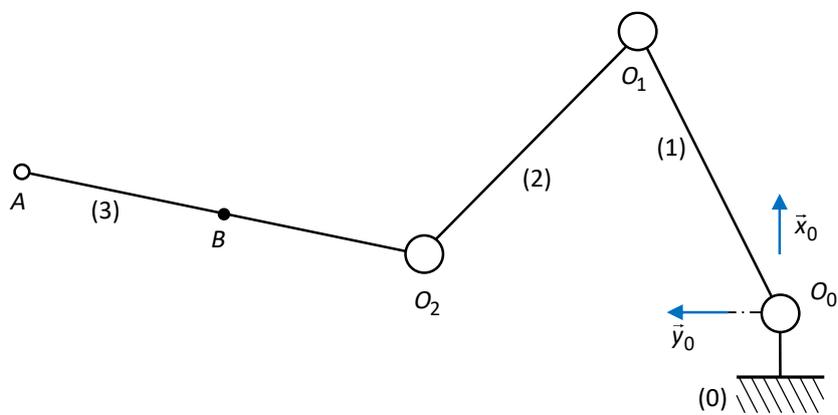
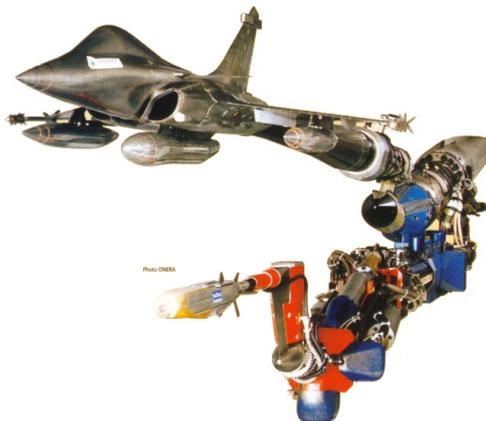


Figure 3

## Exercice 2.3 : MAQUETTE EN SOUFLERIE

Lors du largage d'un missile par un avion porteur, la trajectoire réelle de celui-ci s'écarte parfois considérablement de la trajectoire souhaitée. Du fait des phénomènes fortement non-linéaires qui caractérisent les écoulements aérodynamiques, il se peut que le missile largué soit pris dans les turbulences engendrées par l'avion et revienne percuter celui-ci.

Pour étudier ces phénomènes, l'O.N.E.R.A. (Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales) a réalisé un **système de trajectographie captive**. Celui-ci consiste en une maquette d'avion à l'échelle 1/6, larguant une maquette du missile. L'ensemble est porté par un bras articulé, doté de nombreux degrés de liberté et pouvant reproduire tous les mouvements tridimensionnels des objets portés (cf. photos ci-dessous).

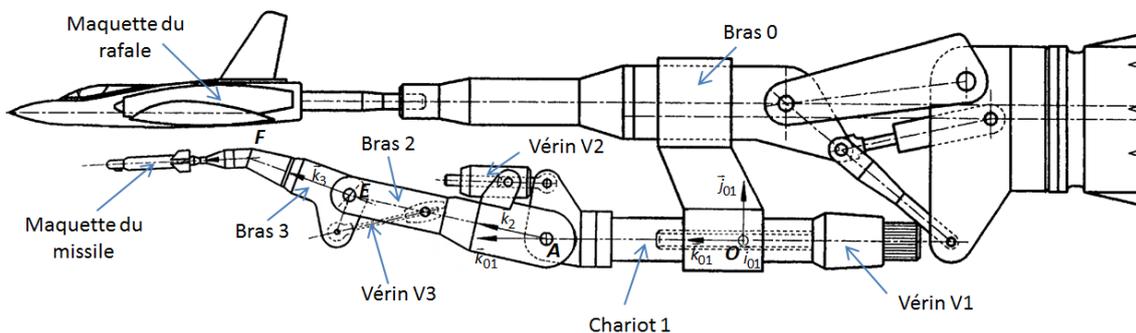


Photos 1 et 2 : Installation de trajectographie captive. Essai de largage d'un missile Exocet AM39 sous maquette de Rafale dans la grande soufflerie S2MA de l'ONERA à Modane.

Les efforts extérieurs que subissent l'avion et le missile sont le poids et les efforts d'origine aérodynamique. Les phénomènes de mécanique des fluides obéissent à des similitudes : à partir des grandeurs physiques observées à une certaine échelle, on peut déduire la valeur de ces mêmes grandeurs à une autre échelle. Le respect des règles de similitude conduit à une échelle de maquette proche de l'avion réel expliquant l'importance des moyens matériels en jeu : la partie centrale de la soufflerie a huit mètres de diamètre sur une longueur de quatorze mètres.

La fonction du système de trajectographie est d'observer une trajectoire représentative de la trajectoire réelle du missile largué par rapport à l'avion en vol.

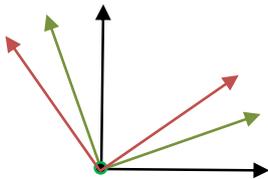
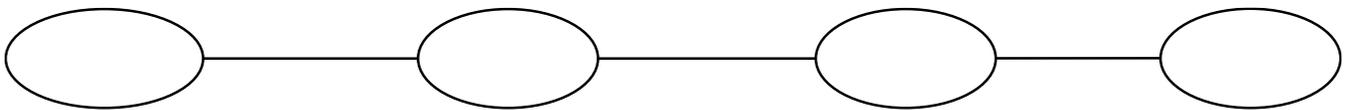
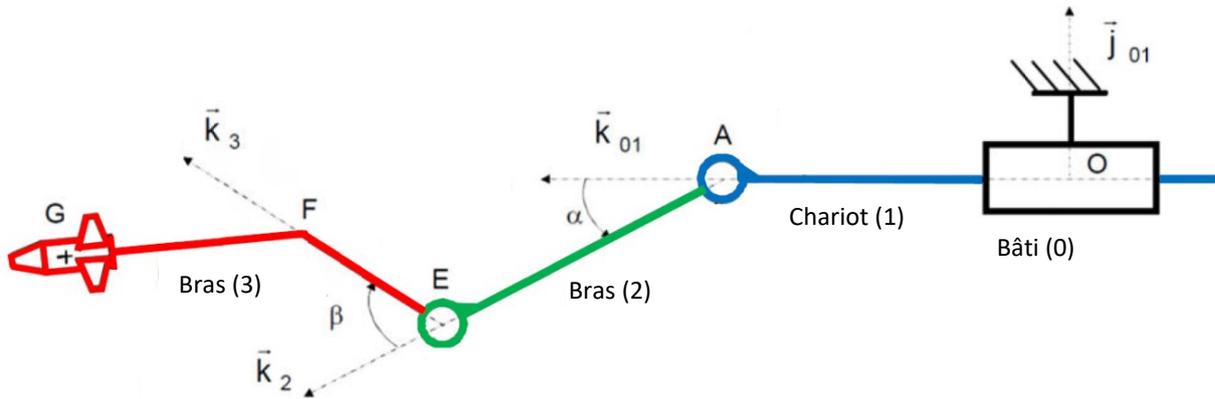
**Le système sert de moyen de mesure, mais également de commande.** L'avion et le missile sont placés par les bras en positions initiales. Les efforts aérodynamiques sur le missile sont mesurés et, par application des lois de Newton, le contrôleur détermine la position du missile après un incrément de temps. On commande alors le déplacement jusqu'à cette nouvelle position et on itère.



Dans l'étude suivante, on s'intéressera au système automatisé de déplacement du missile par rapport à l'avion.

**Objectif :** Déterminer les relations entre les paramètres cinématiques (position et vitesse) permettant d'imposer un mouvement à la maquette du missile par rapport à la maquette de l'avion.

Un schéma cinématique est donné ci-dessous. Les vérins qui contrôlent les mouvements entre les différents bras et le chariot ne sont pas modélisés. Les bases utilisent les **vecteurs unitaires**  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_n)$  ( $i_0$  commun à toutes les bases).



$$\begin{aligned} \vec{OA} &= \lambda(t) \vec{k}_{01} \\ \vec{AE} &= l_2 \vec{k}_2 \quad \text{avec } l_2 = 1,38 \text{ m} \\ \vec{EF} &= l_3 \vec{k}_3 \quad \text{avec } l_3 = 72 \text{ cm} \end{aligned}$$

**Q1 :** Compléter le graphe des liaisons (liaisons, paramètres de position) et la figure de changement de base (vecteurs et vecteurs vitesse angulaire) et mettre en couleur le schéma cinématique.

### Applications du cours : déterminer des torseurs cinématiques

Rappel : les étapes sont

- 1) Identifier le mouvement étudié : rotation, translation à trajectoire rectiligne ou circulaire, combiné.
- 2) déterminer le vecteur vitesse angulaire ;
- 3) choisir un point fixe dans l'ensemble en mouvement relatif ;
- 4) calculer son vecteur vitesse, vérifier l'homogénéité ;
- 5) écrire le torseur.

**Q2 :** Écrire les torseurs cinématiques  $\{V_{1/0}\}$ ,  $\{V_{2/1}\}$  et  $\{V_{3/2}\}$ .

**Q3 :** Écrire le torseur cinématique  $\{V_{2/0}\}$ .

### Torseur cinématique de l'ensemble à contrôler

**Q4 :** Déterminer le torseur cinématique du missile par rapport au bâti  $\{V_{3/0}\}$ .

### 1<sup>er</sup> mouvement de chute

Dans le repère  $R_0$  de l'avion, le mouvement de largage le plus simple est une chute du missile, celui-ci restant parallèle à l'avion et sous celui-ci. La vitesse d'éloignement du missile à l'avion est notée  $V$ , négative. **Les questions suivantes font référence à cette configuration.**

- Q5 :** Quel est le mouvement du missile 3 par rapport à 0. En déduire  $\{V_{3/0}\}_{imposé}$  pour ce mouvement.
- Q6 :** Déterminer les 2 relations vectorielles reliant les paramètres de position et leurs dérivées avec les paramètres du mouvement imposé.
- Q7 :** En projetant dans la base de référence, en déduire 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du mouvement imposé.
- Q8 :** Intégrer ces résultats afin d'obtenir un système de 3 équations sur les paramètres de position. On notera  $A$ ,  $B$  et  $C$  les constantes d'intégration.

### 2<sup>nd</sup> mouvement de chute

Un autre mouvement de chute est défini par le torseur  $\{V_{3/0}\}_{imposé} = \begin{cases} \omega_{imp} \vec{i}_0 \\ V \vec{j}_{01} \end{cases}$  avec  $V$  une constante négative et  $\omega_{imp}$  une constante positive.

- Q9 :** Exprimer  $\{V_{3/0}\}$  en  $F$  en utilisant la relation de Varignon.
- Q10 :** Déterminer 3 relations scalaires non triviales entre les paramètres de position, leurs dérivées et les paramètres du 2<sup>nd</sup> mouvement imposé. Intégrer ces relations.

# ÉLÉMENTS DE REPONSE

## TD1

### Centrifugeuse

$$Q2 : \vec{V}_{2/0}(G) = \dot{\alpha}(bcos\beta + a) \vec{y}_1 - \dot{\beta}b \vec{z}_2$$

$$Q4 : \dot{\alpha} = 52 \text{ tr} \cdot \text{mn}^{-1}$$

### Homogénéité

Q1 : oui, non, non, oui, oui, non

### Unité de découpe de savons

Q1 : mouvement de translation à trajectoire circulaire.

$$Q2 : \vec{V}_{P/0} = \dot{\mu}(t) \vec{z}_0 + L\dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$Q3 : \vec{V}_{P/0} \cdot \vec{y}_0 = V_s \text{ d'où } -L\dot{\alpha} \sin\alpha = V_s$$

$$Q4 : \alpha = \arccos\left(\frac{V_s t}{L}\right)$$

### Robot de peinture

$$Q2 : \vec{OP} = \lambda(t) \vec{y}_0 + H \vec{z}_0 + L \vec{z}_3 \text{ d'où } \vec{V}_{P/0} = \dot{\lambda} \vec{y}_0 + L(\dot{\alpha} \sin\beta \vec{y}_2 + \dot{\beta} \vec{x}_3)$$

$$Q3 : \vec{V}_{P/0} = V \vec{x}_0. \text{ Sur } \vec{z}_0 : -L\dot{\beta} \sin\beta = 0, \text{ soit } \beta = \text{constante}$$

$$Q4 : -L\dot{\alpha} \sin\beta \sin\alpha + L\dot{\beta} \cos\beta \cos\alpha = V \text{ et } \dot{\lambda} + L\dot{\alpha} \sin\beta \cos\alpha + L\dot{\beta} \cos\beta \sin\alpha = 0$$

$$Q5 : \dot{\alpha} = \frac{-V}{L \sin\beta_0 \sin\alpha} \text{ et } \dot{\lambda} = \frac{V}{\tan\alpha}$$

## TD2

### Robot ramasseur de fruits

$$Q1 : \{V_{3/0}\} = \begin{cases} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \\ R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 \end{cases}$$

$$Q2 : \{V_{3/0}\}_t = \begin{cases} \vec{0} \\ V \vec{x}_0 \end{cases}$$

$$\{V_{3/0}\}_{r1} = \begin{cases} \omega_3 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{V_{3/0}\}_{r2} = \begin{cases} N \frac{2\pi}{60} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$Q4 : \begin{cases} \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0 \\ -R\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) = V \text{ et } \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = A \\ R \cos\theta_1 + R \cos(\theta_1 + \theta_2) = Vt + B \\ R \sin\theta_1 + R \sin(\theta_1 + \theta_2) = C \end{cases} \\ R\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \end{cases}$$

$$Q5 : \vec{V}_{3/0}^2(O_2) = R\omega_3 (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \text{ et } \begin{cases} \omega_3 \vec{z}_0 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \\ R\omega_3 (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = R\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + R(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2 \end{cases}$$

### Maquette en soufflerie

$$Q2 : \{V_{1/0}\} = \begin{cases} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} \end{cases}, \{V_{2/1}\} = \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{cases}, \{V_{3/2}\} = \begin{cases} \dot{\beta} \vec{i}_0 \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$Q3 : \{V_{2/0}\} = \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{i}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} \end{cases}$$

$$Q4 : \{V_{3/0}\} = \begin{cases} (\dot{\beta} + \dot{\alpha}) \vec{i}_0 \\ \dot{\lambda} \vec{k}_{01} - \dot{\alpha} l_2 \vec{j}_2 \end{cases}$$

$$Q5 : \{V_{3/0}\}_{impose} = \begin{cases} \vec{0} \\ V \vec{j}_{01} \end{cases}$$

$$Q7 : \begin{cases} \dot{\alpha} + \dot{\beta} = 0 \\ -\dot{\alpha} l_2 \cos\alpha = V \\ \dot{\lambda} - \dot{\alpha} l_2 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$Q9 : \vec{V}_{3/0}(F) = \dot{\lambda} \vec{k}_{01} - l_2 \dot{\alpha} \vec{j}_2 - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{j}_3$$

$$Q10 : \begin{cases} \dot{\alpha} + \dot{\beta} = \omega_{imp} \\ l_2 \dot{\alpha} \cos\alpha - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\alpha + \beta) = V \\ \dot{\lambda} - l_2 \dot{\alpha} \sin\alpha - l_3 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$