PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

TD 2 : TRACE ET IDENTIFICATION DU COMPORTEMENT FREQUENTIEL DES SLCI AVEC 1^ER^ ORDRE

C 09

CORRIGE

Exercice 2.1 : **REPRESENTATION ASYMPTOTIQUE DE BODE**

Q1 : Tracer les diagrammes de Bode, en redémontrant le résultat, de $F(p)=\frac{10}{p}$, avec des pulsations comprises entre 0,1 et 1000 rad/s. Ajouter au graphique les diagrammes asymptotiques et les courbes approchées de gain et phase pour $G(p)=\frac{2}{1+p/5}$ en plaçant les points particuliers. Conclure sur le comportement aux hautes fréquences de $G(p)$.

Pour $F(p)=\frac{10}{p}$: $G(\omega)=|F(j\omega)|=\left|\frac{10}{j\omega}\right|=\frac{10}{\omega}$. Pour $\omega=10$ rad/s, le gain est unitaire (0 dB).

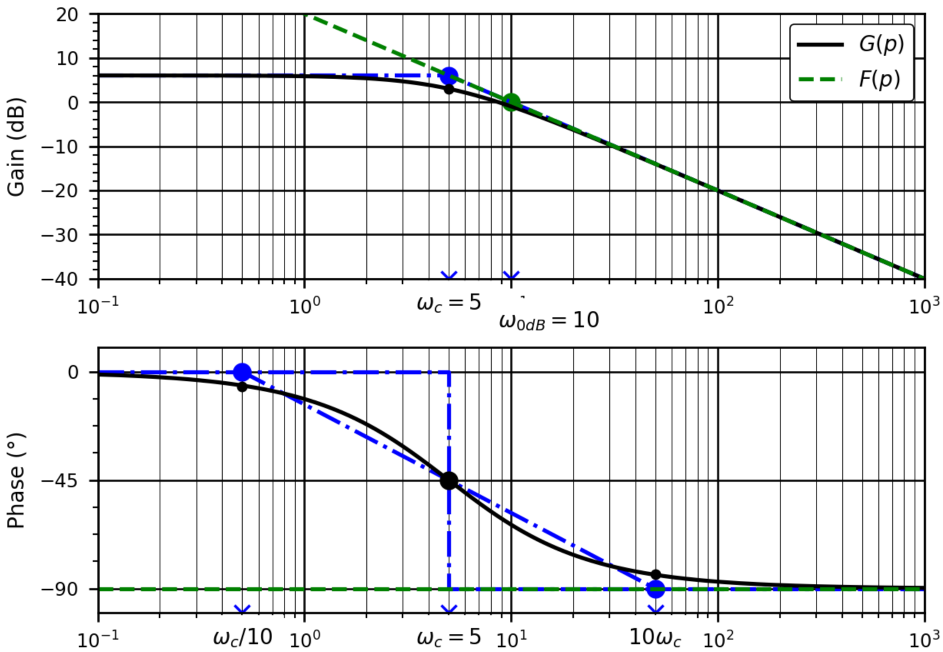
$G_{dB}(\omega)=20\log\left(\frac{10}{\omega}\right)=20\log(10)-20\log(\omega)$. Pente à -20 dB/dec.

On retrouve $G_{dB}=0$ pour $\omega=\omega_{0dB}=10$ rad/s.

$\varphi=\arg\left(\frac{10}{j\omega}\right)=\arg(10)-\arg(j\omega)=0-90°=-90°$

Pour $G(p)=\frac{2}{1+p/5}$: gain à basse fréquence = $20\log(K)=20\log(2)=6$ dB. Pulsation de cassure ω_c = 5 rad/s.

Le comportement aux hautes fréquences de $G(p)$ est le même que celui de l'intégrateur F(p).



Pour le diagramme de gain de l'intégrateur F(p) : placer une droite à -20 dB/décade passant par le point (K, 0dB) .

Pour le premier ordre :

Pour le gain : déterminer le gain statique en décibel. Placer la pulsation de cassure et tracer les asymptotes aux basses fréquences (horizontale) et aux hautes fréquences (-20 dB/decade).

Pour la phase : tracer le diagramme asymptotique avec la discontinuité à 5 rad/s. Tracer la diagonale entre les points à une décade avant et une décade après. Pour la pulsation de cassure, φ =-45°. Pour les points à une décade avant et après, l'écart est de 6°.

Q2 : Tracer le diagramme de Bode de $F_2(p) = \dfrac{2000}{p(100+p)}$ sous la forme du produit d'un intégrateur et d'un premier ordre de gain unitaire (pulsations comprises entre 1 et 10000 rad/s). Commencer par le diagramme asymptotique. Déterminer la phase de la pulsation à 0 dB (gain = 1).

Il faut faire apparaitre un premier ordre usuel, sous la forme K/(1+τp).

$$F_2(p) = \frac{2000}{p(100+p)} = \frac{2000}{100}\frac{1}{p}\frac{1}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)} = \frac{20}{p} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)}.$$

Comportement basse fréquence : intégrateur de gain $K = 20 = \omega_{0dB}$.

et premier ordre de pulsation de cassure à $\omega_c = 100$ rad/s.

Commencer par tracer le diagramme asymptotique :

Gain : placer les pulsations ω_{0dB} et ω_c.

droite à -20dB/dec passant par 20 rad/s à 0dB pour l'intégrateur

droite à 0deb/dec et à -20dB/dec se coupant à la pulsation de cassure ω_c pour le premier ordre.

Phase : -90° pour l'intégrateur

0° puis -90° pour le premier ordre.

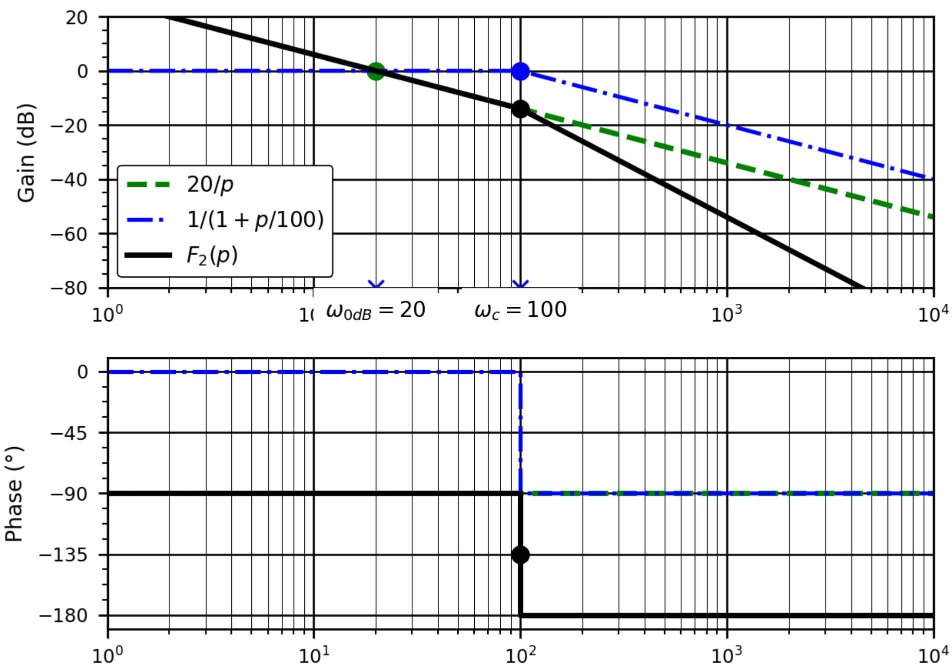
Le gain en décibel d'un produit de fonction est la somme des gains en décibel.

De même, la phase d'un produit de fonction est la somme des phases.

Il est donc aisé, à partir des 2 tracés précédent, de tracer le diagramme asymptotique du produit de l'intégrateur et du premier ordre :

- à partir des basses fréquences, suivre la droite à -20 dB/dec de l'intégrateur ;
- à la pulsation de cassure ω_c du premier ordre, diminuer la pente de -20 dB/dec, soit -40 dB/dec.

Le diagramme de phase se déduit des pentes du diagramme de gain : -20 dB/dec donne -90°, -40 dB/dec donne -180°

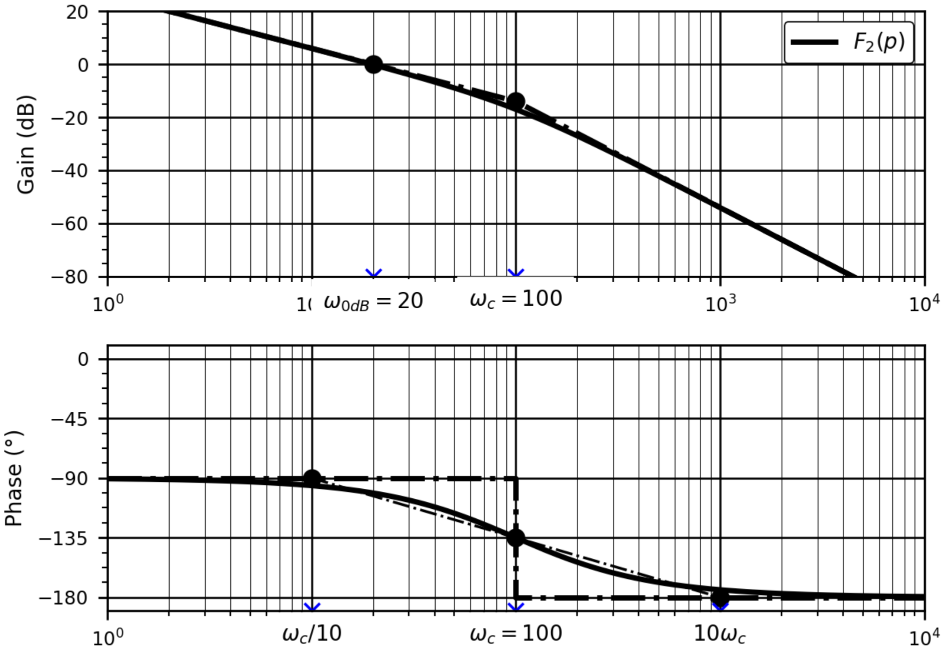


On peut obtenir directement le diagramme asymptotique de $F_2(p)$ ci-après en partant, pour le gain, des basses fréquences et en changeant la pente à ω_c.

Les points particuliers des courbes réelles sont les suivants :

Pour le gain : -3dB sous le point de cassure à ω_c

Pour la phase : -90-45=-135° au point de cassure. On peut tracer la droite entre $\omega_c/10$ et $10\omega_c$. En ces points la courbe réelle est à 6° de l'asymptote.



Pulsation à 0 db (gain unitaire) :

Il faut d'abord chercher la pulsation avec le gain, puis déterminer la phase pour la pulsation trouvée.

On cherche ω telle que $|F_2(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2000}{\omega\sqrt{100^2+\omega^2}} = 1 \Leftrightarrow \omega\sqrt{100^2+\omega^2} - 2000 = 0$. Numériquement $\omega_{0db} = 19{,}6$ rad/s

$\varphi(\omega_{0db}) = 0 - \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{\omega_{0db}}{100}$ = -101°.

Q3 : Mettre la fonction de transfert $F(p) = \dfrac{1000\,(2+p)}{p\,(100+p)}$ sous la forme du produit d'un intégrateur, d'un premier ordre de gain unitaire et d'un inverse de premier ordre de gain unitaire.

Tracer le diagramme de Bode de l'inverse du premier ordre $F_3(p) = (1+\dfrac{p}{2})$.

En déduire le tracé asymptotique de $F(p)$ (pulsations comprises entre 0,1 et 1000 rad/s) en débutant pas le comportement à basse fréquence. Déterminer la phase de la pulsation de coupure à 0dB (gain = 1).

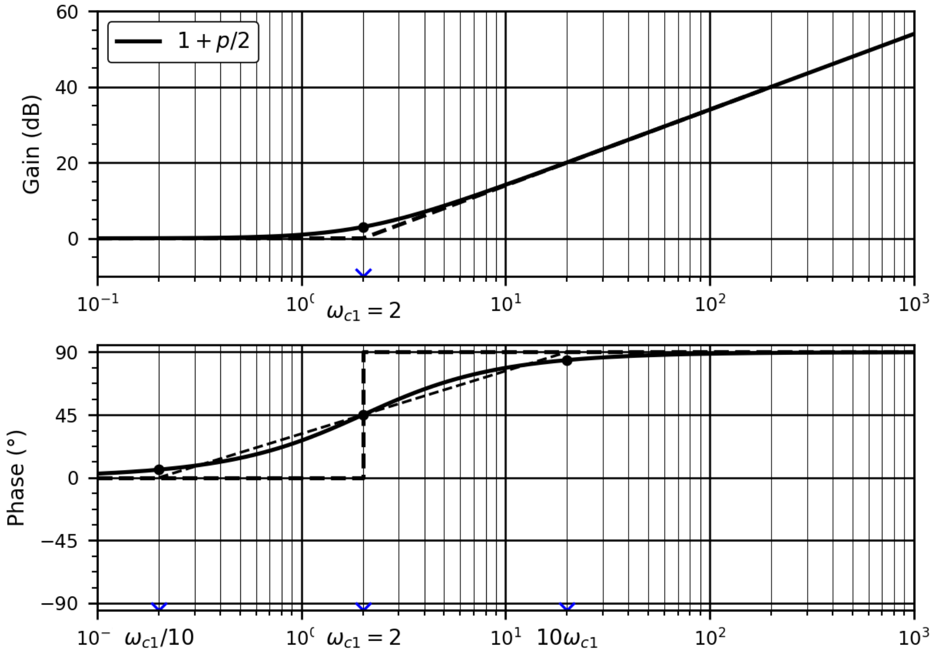
$F(p) = \dfrac{1000(2+p)}{p(100+p)}$ s'écrit $F(p) = \dfrac{20\left(1+\dfrac{p}{2}\right)}{p\left(1+\dfrac{p}{100}\right)} = \dfrac{20}{p} \times \left(1+\dfrac{p}{2}\right) \times \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)}$

Produit d'un intégrateur de gain $K = 20 = \omega_{0dB}$ rad/s ;

d'un inverse de premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c1} = 2$ rad/s ;

d'un premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c2} = 100$ rad/s.

$F_3(p) = \left(1+\dfrac{p}{2}\right)$ est un inverse de premier ordre de gain statique unitaire et de pulsation de cassure $\omega_{c1} = 2$ rad/s.



Le démarche pour tracer le diagramme d'inverse du premier ordre est similaire à celui d'un premier ordre : positionner la pulsation de cassure, le gain statique, puis tracer le diagramme asymptotique, puis les points particuliers (écart de 3dB et phase de 45° à la pulsation de cassure, droite entre $\omega_{c1}/10$ et $10\,\omega_{c1}$).

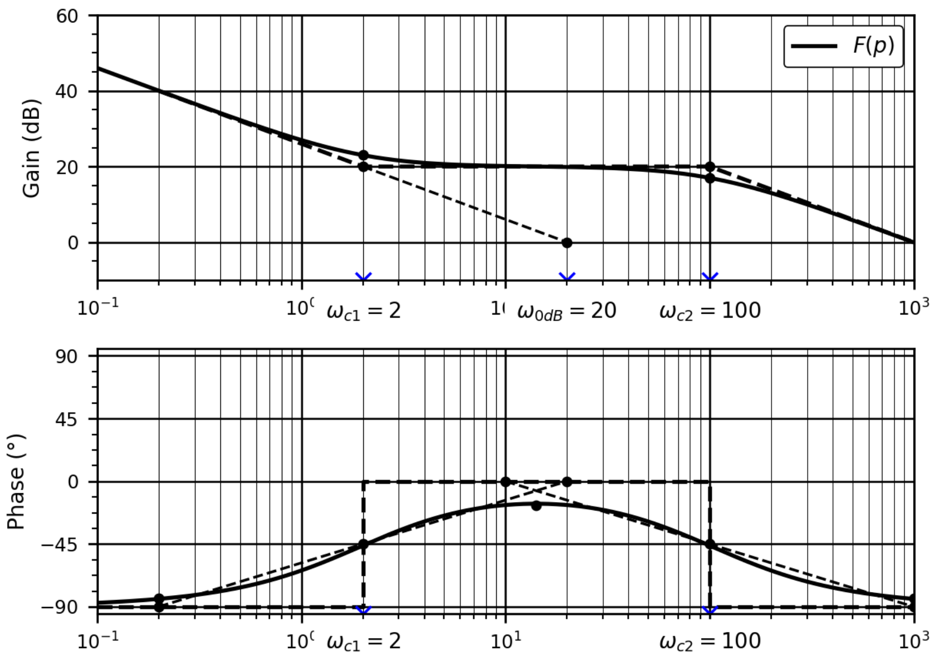
On a $F(p) = \dfrac{20\left(1+\dfrac{p}{2}\right)}{p\left(1+\dfrac{p}{100}\right)} = \dfrac{20}{p} \times \left(1+\dfrac{p}{2}\right) \times \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{p}{100}\right)}$ avec $\omega_{0dB} = K = 20$ rad/s, $\omega_{c1} = 2$ rad/s et $\omega_{c2} = 100$ rad/s.

Pour réaliser le tracer direct de $F(p)$, commencer par le diagramme de gain :

- positionner les pulsations ω_{0dB} , ω_{c1} et ω_{c2} ;
- tracer la droite correspondant au comportement basse fréquence (-20 dB/dec, passant par ω_{0dB} à 0 dB) ;
- en partant des basses fréquences, changer la pente à chaque pulsation de cassure : ajouter 20 dB/dec à ω_{c1} (inverse d'un premier ordre) puis soustraire 20 dB/dec à ω_{c2} (premier ordre).

Tracer le diagramme asymptotique de phase en correspondance, puis, pour les premiers ordre, les droites entre $\omega_{ci}/10$ et $10\omega_{ci}$.

Il ne faut pas chercher à tracer les différents diagrammes élémentaires pour les sommer ensuite.



Gain : $G(\omega)=|F(j\omega)|=\left|\dfrac{1000(2+j\omega)}{j\omega(100+j\omega)}\right|=1000\dfrac{\sqrt{2^2+\omega^2}}{\omega\sqrt{10^2+\omega^2}}$

ω_c vérifie $G(\omega_c)=1$. Numériquement on obtient $\omega_c \approx 995$ rad/s.

Sinon (méthode à éviter absolument) :

$$G(\omega_c)=1 \Leftrightarrow 1000\frac{\sqrt{2^2+\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{100^2+\omega_c^2}}=1 \Leftrightarrow 10^6(4+\omega_c^2)=\omega_c^2(10^4+\omega_c^2) \Leftrightarrow \omega_c^4+\omega_c^2(10^4-10^6)-4.10^6=0$$

$\Delta=(10^4-10^6)^2+16.10^6$, $\omega_c^2=\dfrac{-(10^4-10^6)+\sqrt{\Delta}}{2} \approx 990.10^3$. Soit, $\omega_c \approx 995$ rad/s.

Phase : $\varphi(\omega_c)=0+\arctan\dfrac{\omega_c}{2}-\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{\omega_c}{100}=-84{,}4°$.

Exercice 2.2 : **REPRESENTATION ASYMPTOTIQUE DE BODE**

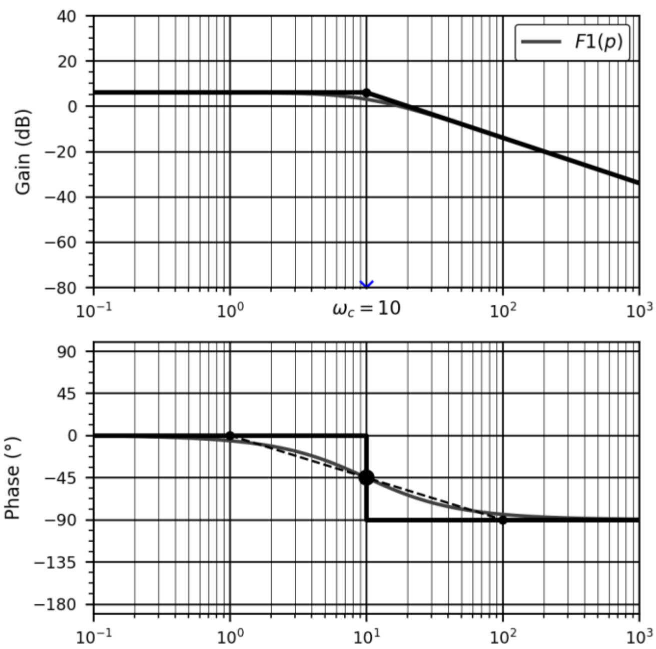
Q1 : Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode des fonctions de transfert suivantes.

1) Écrire les fonctions comme le produit d'une fonction caractérisant le comportement basse fréquence (gain, intégrateur, dérivateur) et de fonctions du premier ordre ou inverse de premier ordre, de gain unitaire.

2) Placer les pulsations de cassure.

3) Placer l'asymptote à basse fréquence.

4) Tracer le diagramme asymptotique de gain en commençant par les basses fréquences et en changeant la pente à chaque pulsation de cassure.

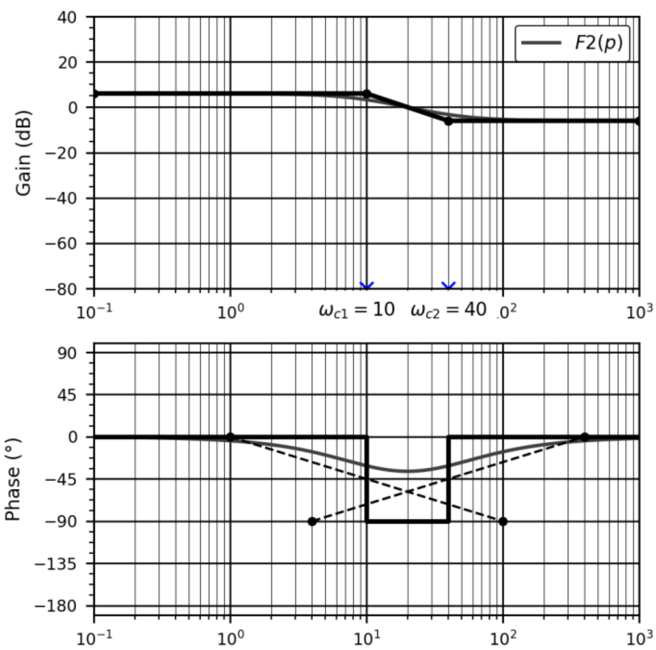


$F_1(p)=\dfrac{20}{10+p}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{10}p}$:

premier ordre, $\omega_c=10$ rad/s

Comportement basse fréquence : gain pur K avec $20\log K \approx 6$ dB.

(Asymptotes du gain : 0 dB/dec puis -20 db/dec.)



$$F_2(p)=\frac{0{,}05p+2}{1+0{,}1p}=2\frac{(1+0{,}025p)}{(1+0{,}1p)}=2\frac{\left(1+\dfrac{1}{40}p\right)}{\left(1+\dfrac{1}{10}p\right)}$$

$$=2\times\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{10}p\right)}\times\left(1+\frac{1}{40}p\right)$$

Comportement basse fréquence : gain pur K avec $20\log K \approx 6$ dB

Premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c1}=10$ rad/s

Inverse de premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c2}=40$ rad/s

(Asymptotes du gain : 0 dB/dec, -20 db/dec puis 0 dB/dec)

$$F_3(p) = \frac{20p}{(100+p)(1+0{,}5p)} = \frac{0{,}2p}{\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{2}\right)}$$

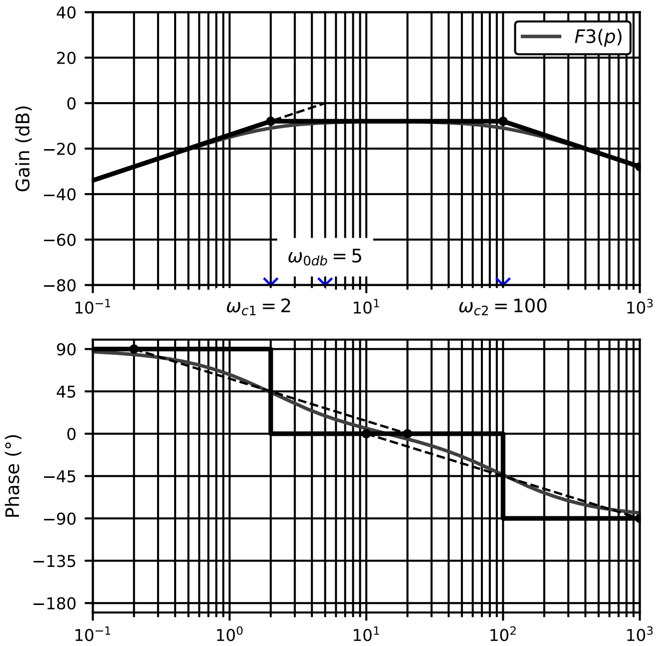
Comportement basse fréquence : dérivateur de fonction de transfert $0{,}2p$, de gain : $G(\omega) = 0{,}2\omega$.

Gain unitaire pour $0{,}2\omega_{0db} = 1$, soit ω_{0dB} = 1/0,2= 5 rad/s

Premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c1} = 2$ rad/s

Premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c2} = 100$ rad/s

(Asymptotes du gain : +20 dB/dec, 0 dB/dec puis -20 dB/dec)



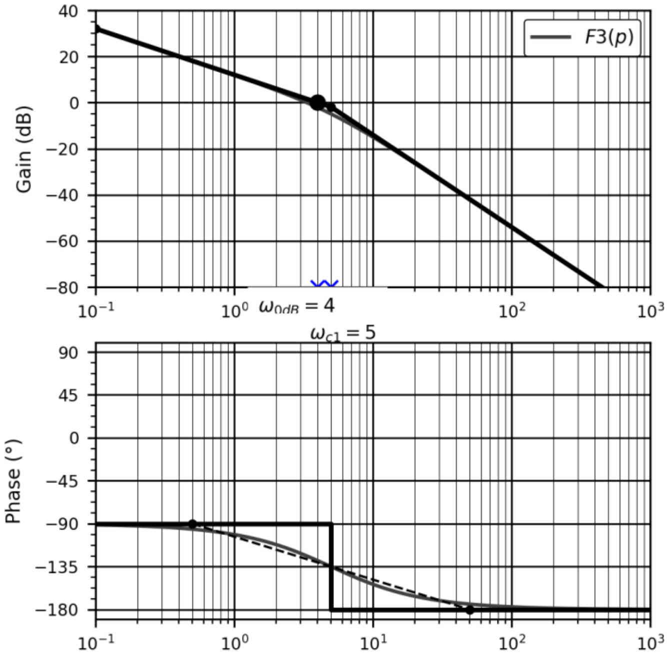
$$F_4(p) = \frac{4}{0{,}2p^2 + p} = \frac{4}{p}\frac{1}{(1+0{,}2p)} = \frac{4}{p}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}p\right)}$$

Comportement basse fréquence : intégrateur de fonction de transfert 4/*p*, de gain $G(\omega) = 4/\omega$.

Gain unitaire pour $4/\omega_{0db} = 1$, soit ω_{0dB} = *K*= 4 rad/s

Premier ordre de pulsation de cassure $\omega_c = 5$ rad/s

(Asymptotes du gain : -20 dB/dec puis -40 dB/dec)



$$F_5(p) = \frac{3p+2}{0{,}08\,(p+5)^2} = \frac{2\left(1+\frac{3}{2}p\right)}{0{,}08\times 5^2\left(1+\frac{1}{5}p\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{0{,}67}p\right)}{\left(1+\frac{1}{5}p\right)^2}$$

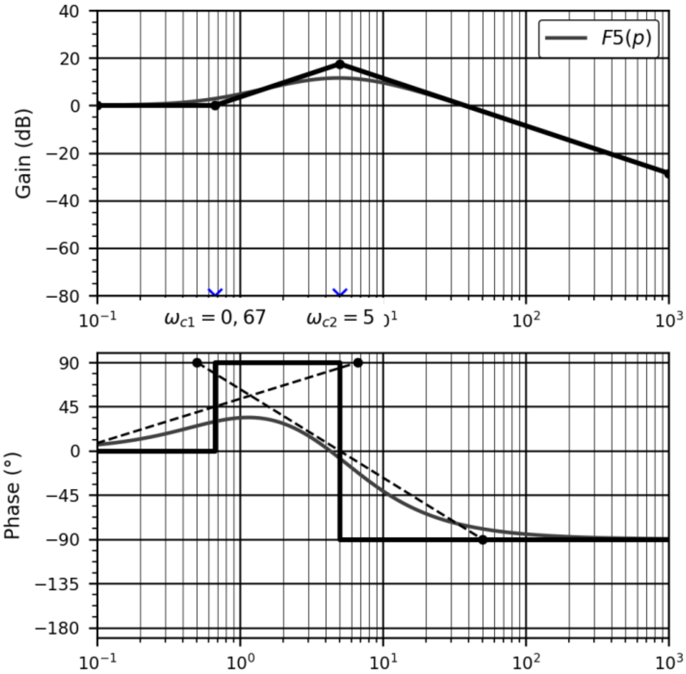
$$= \left(1+\frac{1}{0{,}67}p\right)\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}p\right)^2}$$

Comportement basse fréquence : gain pur unitaire

Inverse de premier ordre de pulsation de cassure $\omega_{c1} = 2/3 \approx 0{,}67$ rad/s

Premier ordre double de pulsation de cassure $\omega_{c2} = 5$ rad/s

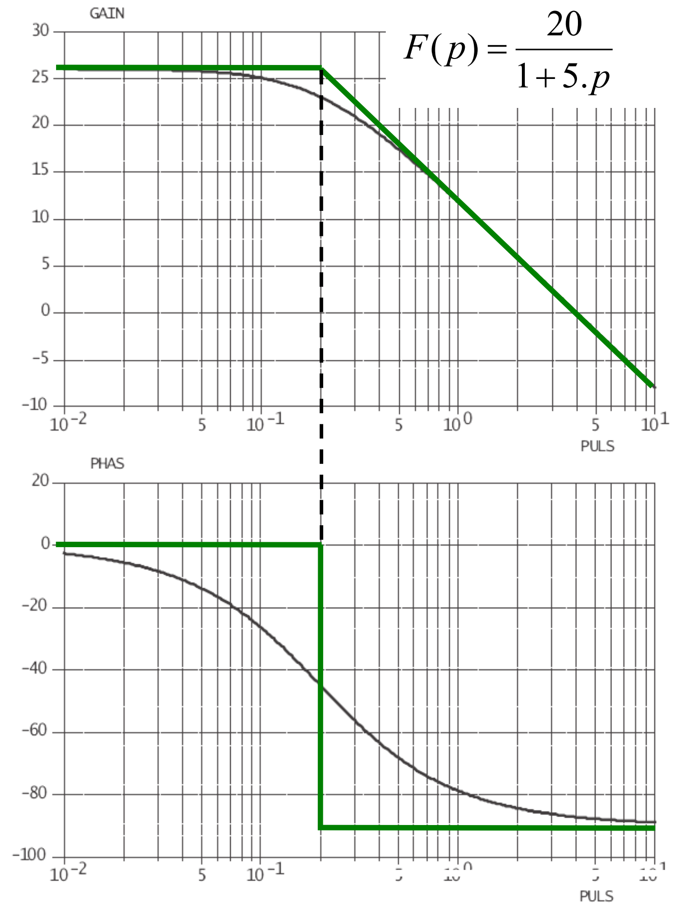
(Asymptotes du gain : 0 dB/dec, +20 db/dec puis –20 dB/dec)



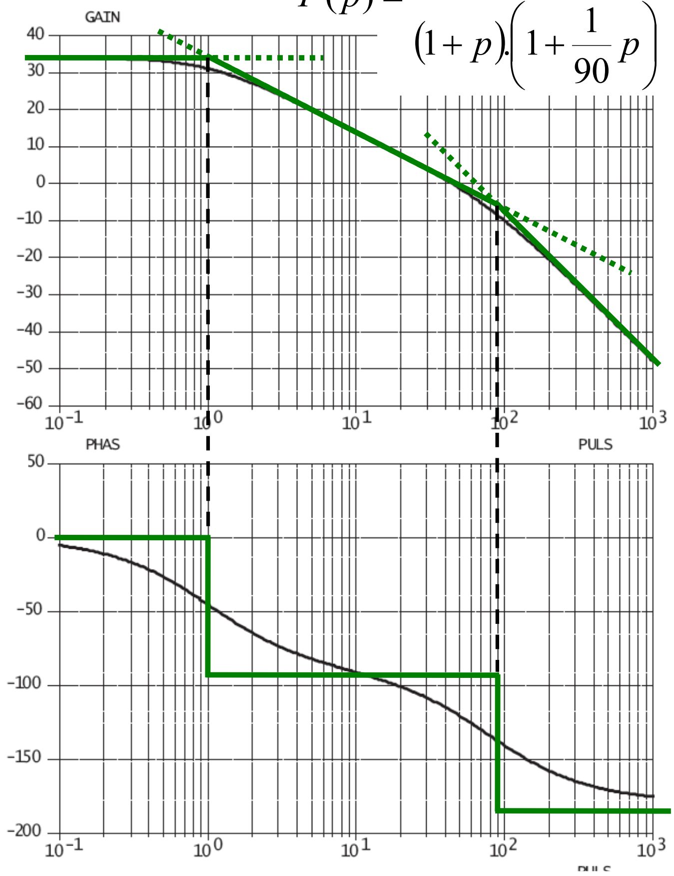
Exercice 2.3 : **IDENTIFICATION DE FONCTIONS DE TRANSFERT SUR DIAGRAMME DE BODE ET BANDE PASSANTE**

Déterminer le comportement aux basses fréquences puis multiplier par un premier ordre ou un inverse de premier ordre à chaque pulsation de cassure. Utiliser la phase pour déterminer les pulsation de cassure, si elles sont suffisamment éloignées (>1 décade).

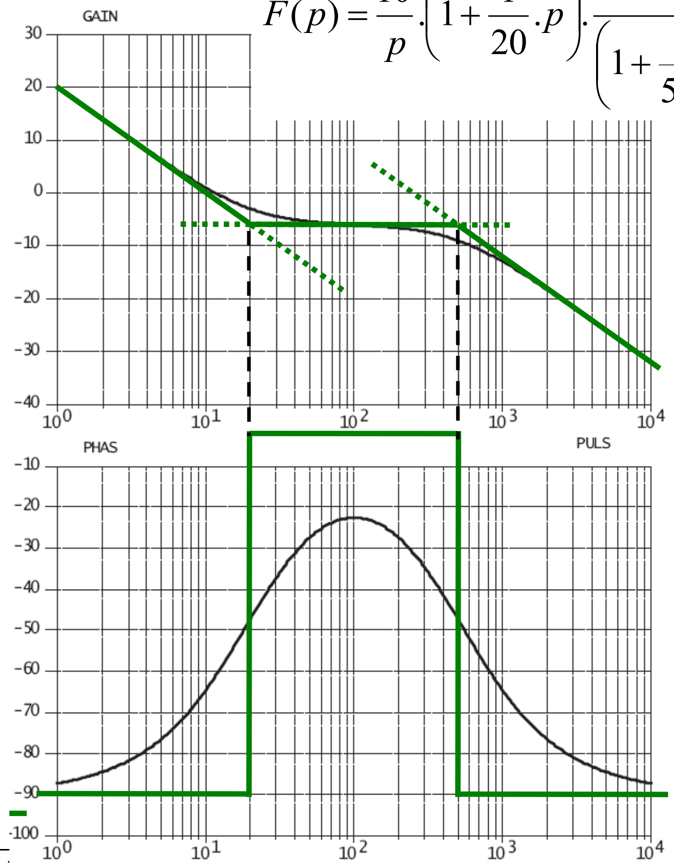
$$F(p)=\frac{20}{1+5.p}$$



$$F(p)=\frac{50}{(1+p).\left(1+\frac{1}{90}p\right)}$$



$$F(p)=\frac{10}{p}.\left(1+\frac{1}{20}.p\right).\frac{1}{\left(1+\frac{1}{500}.p\right)}$$



Q1 : Sur les diagrammes de Bode précédents, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques puis identifier les fonctions de transfert correspondantes.

Q2 : Déterminer analytiquement les bandes passantes à -3 dB des 1er et 2ème systèmes ci-dessous. Vérifier les résultats graphiquement.

Premier système : $F(p)=\dfrac{20}{1+5p}$ Système du premier ordre, $\omega_{c-3\text{db}}=\dfrac{1}{\tau}=0{,}2$ rad/s.

Bande passante = $]0;\omega_{c-3dB}=0{,}2\,\text{rad/s}]$

Deuxième système : $F(p)=\dfrac{50}{(1+p).\left(1+\dfrac{1}{90}p\right)}$

La fréquence de coupure doit être proche de celle du premier ordre de plus basse fréquence de cassure, soit 1 rad/s.

$G(\omega_{c-3dB})=\left|H(j\omega_{c\,3dB})\right|=0{,}7\,K$

Or $G(\omega_{c-3dB})=\dfrac{50}{\sqrt{1+\omega_{c-3dB}{}^2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{90^2}\cdot\omega_{c-3dB}{}^2}}=0{,}7\times 50 \quad\Rightarrow\quad \omega_{c-3dB}=1{,}02\,\text{rad/s}$

Bande passante = $]0;\omega_{c-3dB}=1{,}02\,\text{rad/s}]$