Université de Cergy-Pontoise
Date: janvier 2019

Examen L1-S1-PCST
Durée: 3h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.
(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x$. (ii) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{3sin(x)}{x+4x^2}$.

(c) Est ce que la fonction $f(x) = xsin(\mid x \mid)$ est dérivable en $x = 0$? Justifier.
(d) Démontrer que l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.

Exercice 2.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 \cdot arctan(x^2).$$

(a) Justifier rapidement que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $arctan(x^2) \geq 0$.
(c) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(d) Justifier que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, en déduire que f est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(e) Calculer les limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
(f) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, est ce que f^{-1} est dérivable en $x = 0$? Justifier.

Exercice 3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^n dx$.
(a) Calculer les valeurs de I_0, I_1 et I_2.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par l'intégration par parties appliquée à l'intégrale

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x) \cdot (sin(x))^{n+1} dx$, démontrer que

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(c) En déduire les valeurs de I_3, I_4 et I_5.
(d) Démontrer que la suite $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(e) Est ce que cette suite converge? Justifier.

Exercice 4.
On considère la fonction $f(x) = cos(\frac{1}{x})$ définie sur $]0; +\infty[$.
(a) Calculer $f'(x)$, et justifier que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$-\frac{1}{x^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

(b) Par le théorème des acroissements finis, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{n^2} \leq cos(\frac{1}{n+1}) - cos(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}.$$

(c) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n[cos(\frac{1}{n+1}) - cos(\frac{1}{n})]$.

Exercice 5.
Soient P_1 le plan d'équation $x + y - z = 2$, et P_2 le plan d'équation $2x - y + 3z = 1$.
(a) Justifier que P_1 et P_2 sont sécants.
(b) Soit (d) la droite d'intersection des deux plans, déterminer un vecteur directeur de (d).
(c) Justifier que le point $(1; 1; 0)$ appartient à la droite (d), puis en déduire une équation paramétrique de cette droite.
(d) Soit P le plan passant par le point $(-1; 2; 1)$ et contenant la droite (d). Déterminer un verteur normal au plan P, puis en déduire une équation cartésienne du plan P.