Université de Cergy-Pontoise
Date: janvier 2020

Examen L1-MS1-PCST

Durée: 3h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2+3x}{2x^2-3x}$ (ii) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-2\sin x}{x}$

(c) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = e^{x^2+x}.$$

(d) Calculer les intégrales suivantes:
(i) $\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^x} dx$ (ii) $\int_0^\pi x \cos x dx.$

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 6xe^{x^2} - 4x^3 + 2x - \sin x.$$

(i) Justifier rapidement que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
(ii) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(iii) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(iv) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f(x)$.
(v) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, calculer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction f^{-1}.

Exercice 3.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \sin x \ ; \qquad g(x) = f(x) - x.$$

(i) Etudier la variation de la fonction $g(x)$, puis en déduire qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $1 - \sin l = l$.

(ii) Justifier que $l \in [\frac{\pi}{40}; 1]$.
(Indications: $\sin\frac{\pi}{40} < 0,5; \quad \pi < 4$.)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{40} \leq u_n \leq 1$.
(Indication: $\sin 1 < 0,9$.)
(iv) A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(x)$, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - l \mid \leq \cos\frac{\pi}{40} \cdot \mid u_n - l \mid .$$

(v) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - l \mid \leq (\cos\frac{\pi}{40})^n \cdot \mid u_0 - l \mid .$$

(vi) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 4.
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, soient $A_{(1;0;0)}$ et $B_{(0;0;2)}$. Soient P_1 le plan d'équation $x-y+z = 2$ et P_2 le plan d'équation $x+y-z = 3$.
(i) Justifier que P_1 et P_2 sont sécants.
(ii) Soit D la droite passant par les points A et B, déterminer une équation paramétrique de D.
(iii) Justifier que D et P_1 sont sécants et que D et P_2 sont également sécants.
(iv) Soit C_1 le point d'intersection de D et P_1, soit C_2 le point d'intersection de D et P_2. Calculer les coordonnées de C_1 et C_2.
(v) Soit $d(C_1, P_2)$ la distance entre le point C_1 et le plan P_2, calculer la valeur de $d(C_1, P_2)$. Calculer également la valeur de $d(C_2, P_1)$.
(vi) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(t)$ le point appartenant à la droite D et de paramètre t, déterminer l'expression de la fonction suivante:

$$f(t) = [d(M(t), P_1)]^2 + [d(M(t), P_2)]^2.$$

(vii) Etudier la variation de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En déduire le minimum de f.