L1 PCST
Printemps 2019
S2, Mathématiques

Examen - Session 2 - 18 juin 2019

Durée 1h30. Aucun document ni calculatrice autorisé

Exercice 1: Soit $\omega = 1 + \sqrt{3}i$

1. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : ω, ω^2 et ω^3.

2. Donner une solution de $z^2 = \omega$.

Exercice 2: Soit $f(x,y) = \ln(x+y)$.

1. Déterminer puis dessiner le domaine de définition de f

2. Déterminer et dessiner les courbes de niveau 0 et de niveau $\ln(3)$.

3. Soit P le plan tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ en point $(1;0;f(1,0))$.

- **a.** Est-ce que le plan d'équation $x+y-z=4$ et P sont sécantes ? Justifier. Si oui donner une représentation paramétrique de l'intersection.
- **b.** Est-ce que le plan d'équation $x+y=0$ et P sont sécantes ? Justifier. Si oui donner une représentation paramétrique de l'intersection.

Exercice 3: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4: Soit (E) l'équation differentielle $y'' + 2y' + y = x + 2$.

1. En résolvant son équation caractéristique, donner toutes les solutions de $y'' + 2y' + y = 0$.

2. En montrant que $y(x) = x$ est une solution particulière de (E), en déduire l'ensemble de toutes les solutions de (E).

3. Si on pose $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, donner la solution de (E).

Exercice 5: Résoudre l'équation differentielle $(1-x^2)y' - 2xy = 1$.

Exercice 6: Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que -1 et 6 sont les valeurs propres de M. Trouver les vecteurs propres de M.

2. En déduire une matrice P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

3. Application : Soit u_n une suite de nombres réels tels que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = 6u_n + 5u_{n+1}$. On pose $X_n = \left(\begin{smallmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$.

- **a.** Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ et en déduire que $X_n = M^nX_0$.
- **b.** Déterminer u_n en fonction de n.