SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

CPGE 1re année

MPSI3-PCSI1

SLCI : fonctions de transfert et comportement temporel

Automatique linéaire

C 04

2023-2024

https://www.s2i-chateaubriand-joliotcurie.net

Objectifs

Modéliser un système, asservi ou non, par une fonction de transfert dans le domaine de Laplace

Prévoir les performances des SLCI usuels à partir de leur fonction de transfert

Identifier un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux ou de simulation

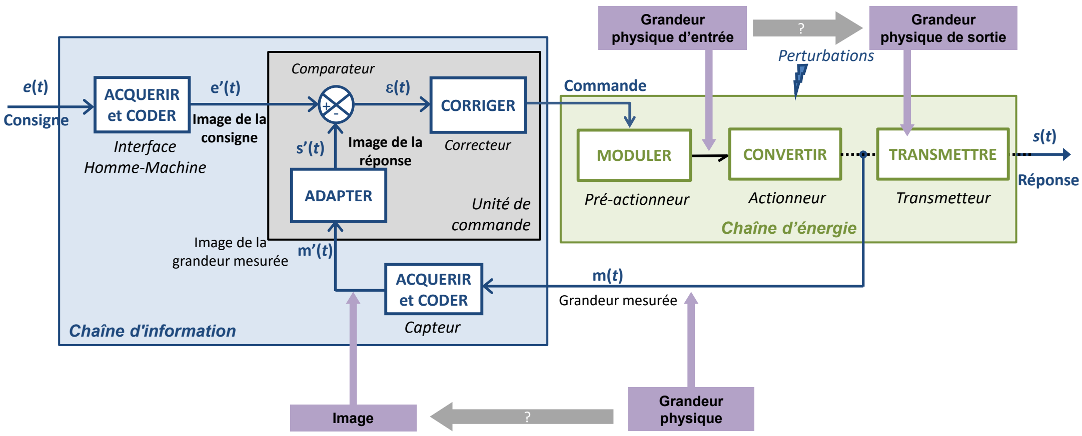
Sommaire

I Objectif

L'objectif est de **modéliser** par une **fonction de transfert un composant** ou un **système**, asservi ou non, mais caractérisé par un ensemble de grandeurs scalaires. Cette fonction de transfert est alors caractéristique des équations différentielles régissant le comportement du composant ou du système. Elle permet de prévoir les performances et le **comportement temporel** du système pour différentes entrées.

Réciproquement, l'analyse de la **réponse** à une **entrée test**, un échelon, réponse obtenue **expérimentalement** ou par **simulation numérique**, permet de retrouver la fonction de transfert. Le modèle ainsi obtenu est appelé **modèle de comportement**.

Les outils mis en place sont adaptés à la modélisation des composants des chaînes de puissance et d'information ainsi qu'aux différents domaines de la physique (mécanique avec prise en compte des inerties, thermique, hydraulique, électrique…).



II Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

Pour prédire les performances d'un système par simulation ou calcul, il faut pouvoir modéliser mathématiquement son comportement. Le modèle présenté ici est dit **L**inéaire, **C**ontinu, **I**nvariant. Les **S**ystèmes pouvant être modélisés ainsi sont les SLCI.

II.1 Grandeurs temporelles, paramètres, entrées et sortie

Dans le système et les modèles étudiés, on distingue :

– les **grandeurs temporelles**, **scalaires**, qui **dépendent** du **temps** : température, position, vitesse, tension, intensité…. Elles correspondent à des grandeurs **échangées**(1) dans un IBD ou dans les chaînes d'information et de puissance ;
– des **paramètres caractéristiques** du système étudié : dimensions, résistance et inductance électrique, masse…

(1) C'est une différence importante avec la modélisation par chaîne fonctionnelle et les liens de puissance formés par deux grandeurs (flux et effort).

On distingue aussi, parmi les grandeurs temporelles, une ou plusieurs **entrées** et **une sortie**.

Exemple : pour un moteur électrique, les paramètres sont généralement la résistance électrique et l'inductance du bobinage, l'inertie des pièces en mouvement…

Les grandeurs temporelles sont la tension d'alimentation aux bornes du moteur, l'intensité du courant, le couple (effort tournant) fourni par le moteur, le couple résistant s'opposant au mouvement…

Les entrées sont généralement la tension d'alimentation et le couple résistant ; la sortie la vitesse angulaire.

II.2 Comportement linéaire

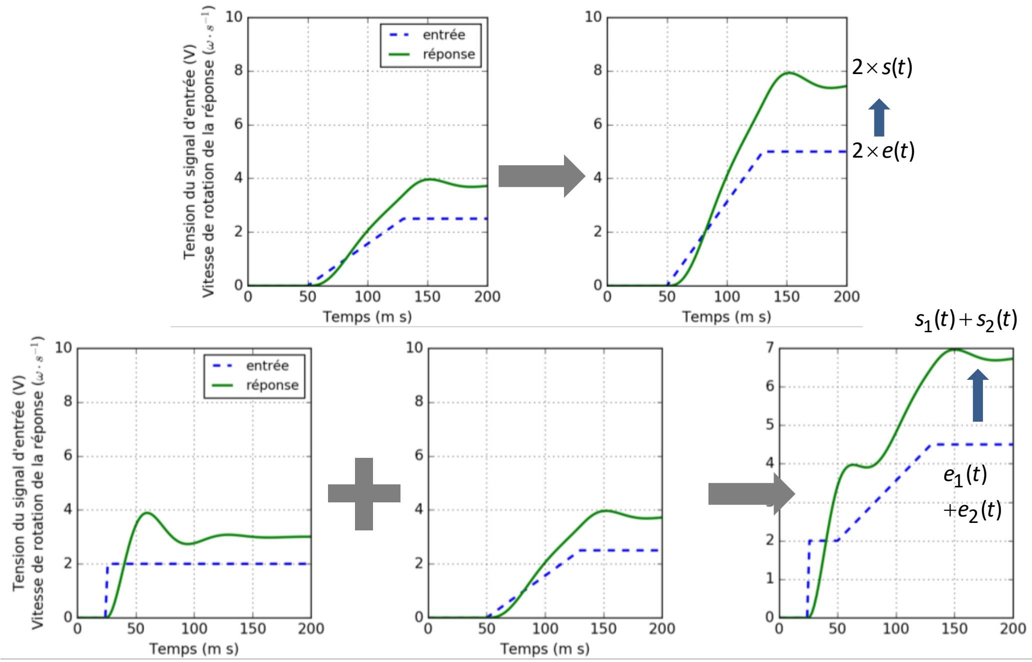
On appelle **réponse**, l'évolution temporelle de la grandeur de sortie pour des fonctions d'entrée (signaux) données.

Lorsque le **comportement** est **linéaire**, la **réponse dépend linéairement des signaux d'entrée**.

Conséquence pour la réponse à 1 entrée :

- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$,
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$,

alors pour un signal d'entrée $e(t)=e_1(t)+k\times e_2(t)$, la réponse est $s(t)=s_1(t)+k\times s_2(t)$.



Conséquence pour la réponse à 2 entrées :

- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$ sur l'entrée e_1,
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$ sur l'entrée e_2,

alors, si les signaux sont appliqués simultanément aux deux entrées, la réponse est $s(t)=s_1(t)+s_2(t)$.

II.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- les grandeurs temporelles sont des **fonctions continues du temps**(1);
- le modèle est **invariant** ; les paramètres physiques sont supposés constants durant la période d'étude : la réponse ne dépend pas de l'instant d'application des entrées ni des valeurs initiales ;
- le modèle est **linéaire (2).**

Un **SLCI** est caractérisé par un **système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n\text{-}1}\frac{d^{n\text{-}1} s}{dt^{n\text{-}1}} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m\text{-}1}\frac{d^{m\text{-}1} e}{dt^{m\text{-}1}} + \ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

$s(t)$: réponse *et* $e(t)$: signal d'entrée

n est **l'ordre** de l'équation(3).

Le modèle est **causal** : les signaux d'entrée imposent la réponse.

(1) on néglige alors les effets de la quantification et de l'échantillonnage des signaux numériques

(2) La limite de vitesse d'un moteur est une non-linéarité, par exemple.

(3) le comportement d'un système dépend du passé, pas du futur. Les systèmes réels étudiés imposent m≤n. Cette propriété permet de définir, à priori, l'entrée et la sortie.

Le modèle peut être obtenu par application des lois de la physique ou expérimentalement.

Un **modèle de connaissance** est un modèle déterminé par application de lois et principes de la **physique**.

Un **modèle de comportement** est déterminé à partir de réponses à des **signaux tests** obtenus **expérimentalement** ou par simulation.

Remarque : la résolution des équations différentielles nécessite aussi de connaître les signaux d'entrée, $e(t)$, ainsi que *n* conditions initiales pour une équation d'ordre *n*.

II.4 Limites de la représentation par équations différentielles

Exemple : Considérons un **moteur à courant continu**.

La grandeur d'entrée est une tension d'alimentation du moteur. La grandeur de sortie est la vitesse angulaire de l'axe du moteur par rapport au stator.

Les équations du modèle de connaissance usuel, sans couple résistant, sont données ci-dessous.

Les équations proviennent des lois physiques suivantes :

(1) loi des mailles

(2) et (3) électro-magnétisme

(4) loi de Newton pour un solide en rotation

Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu (MCC)		
$u(t)=e(t)+R\,i(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}$	(1)	$u(t)$: tension aux bornes du moteur $i(t)$: intensité du courant du moteur
$e(t)=k_e\,\omega(t)$	(2)	$\omega(t)$: vitesse angulaire du moteur
$c(t)=k_C\,i(t)$	(3)	$c(t)$: couple du moteur
$J\dfrac{d\omega(t)}{dt}=c(t)$	(4)	$e(t)$: f.e.m J, k_e, k_c, R et L : caractéristiques du moteur

Les équations (3) et (4) permettent d'obtenir l'intensité en fonction de la vitesse angulaire du moteur : $i(t)=\dfrac{J}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt}$. Le modèle étant invariant, *J* et k_c sont des constantes, et en dérivant : $\dfrac{di(t)}{dt}=\dfrac{J}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$.

En remplaçant l'intensité et $e(t)$ dans l'équation (1), on obtient une équation différentielle (du second ordre), caractéristique du moteur :

$$k_e\,\omega(t)+\frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}+\frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}=u(t)\ .$$

La résolution nécessite de connaitre la fonction $u(t)$ ainsi que 2 conditions initiales : vitesse angulaire $\omega(t)$ et accélération angulaire $\dfrac{d\omega(t)}{dt}$ à un instant donnée $t_0=0$, par exemple.

L'équation différentielle caractérise le comportement du composant. Cependant, on recherche une représentation indépendante de $u(t)$ et de $\omega(t)$.

Les équations différentielles d'un modèle de connaissance ou de comportement permettent de caractériser le comportement d'un SLCI. Mais elles ne permettent pas de relier de façon « simple » la sortie en fonction de l'entrée, ni de caractériser le comportement du système uniquement par ses paramètres caractéristiques indépendamment des grandeurs d'entrée et de sortie. La transformée de Laplace donne une réponse pratique à ce problème et la possibilité de prédire les performances du composant ou du système.

III Transformée de Laplace et fonction de transfert

III.1 La transformée de Laplace

Définition

(1) Et de résoudre les équations différentielles. Mais cet aspect est hors programme actuellement.

La **transformée de Laplace** permet de transformer les équations différentielles linéaires à coefficients constants **en polynômes**(1).

Une fonction **causale** est telle que $f(t)=0$ pour $t<0$.

(2) La pratique étudie l'effet d'une cause que l'on situe à la date t=0. La cause précédant toujours l'effet, la transformée de Laplace n'est définie que pour des fonctions dites « causales » : le système est stabilisé avant et au début de l'étude.

Soit $f(t)$ une fonction causale réelle d'une variable réelle(2). On définit sa transformée de Laplace $L\left[f(t)\right]$ comme l'unique **fonction** $F(p)$ **de la variable complexe** p **telle que :**

$$f(t)\xrightarrow{L\left[f(t)\right]}F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt$$

Domaine temporel Domaine symbolique (ou de Laplace)

La transformée de Laplace inverse existe. Elle est bi-univoque. Ces propriétés permettent de résoudre les équations différentielles linéaires invariantes de façon simple. Nous ne l'utiliserons pas dans ce contexte.

Propriétés de la transformée de Laplace

Éléments de démonstration en annexe.

	LINEARITE		DERIVATION	INTEGRATION	PRODUIT DE 2 FONCTIONS
$f(t)$	$K\ f(t)$	$K_1\ g(t)+K_2\ h(t)$	$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int f(t)dt$	$f(t)\cdot g(t)$
$F(p)$	$K\ F(p)$	$K_1\ G(p)+K_2\ H(p)$	$p^n\ F(p)$	$\dfrac{F(p)}{p}$	$\cancel{F(p)\cdot G(p)}$
			avec **conditions initiales nulles**		

Les **conditions initiales sont supposées nulles** : système supposé **au repos** à t = 0. Pour une équation différentielle d'ordre n :

$$f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$$

C'est la **condition de Heaviside**.

Application : soit l'équation différentielle $5\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+3\dfrac{dx(t)}{dt}+2x(t)=v(t)$.

A1 - Déterminer, dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de cette équation ainsi que les conditions initiales.

Si $x(t)\xrightarrow{L}X(p)$, alors, avec les conditions initiales nulles : $\dfrac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{L}p\,X(p)$ et $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\xrightarrow{L}p^2\ X(p)$

d'où la transformée de l'équation différentielle : $5p^2\ X(p)+3p\,X(p)+2\,X(p)=V(p)$

soit encore : $X(p)\left[5p^2+3p+2\right]=V(p)$

Equations de degré 2, les conditions initiales sont : $x(0)=\dfrac{dx(0)}{dt}=0$.

III.2 Fonction de transfert entre la sortie et une entrée

Exemple du moteur à courant continu

L'équation différentielle obtenue sans couple résistant est : $u(t)=k_e\,\omega(t)+\dfrac{JR}{k_c}\dfrac{d\omega(t)}{dt}+\dfrac{JL}{k_c}\dfrac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

Notons $U(p)$ la transformée de Laplace de $u(t)$ et $\Omega(p)$ celle de $\omega(t)$.

Si les conditions initiales sont nulles, l'équation différentielle, dans le domaine de Laplace s'écrit[1] : $U(p)=k_e\,\Omega(p)+\dfrac{JR}{k_c}p\,\Omega(p)+\dfrac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)$; soit : $U(p)=\left[k_e+\dfrac{JR}{k_c}p+\dfrac{JL}{k_c}p^2\right]\Omega(p)$

(1) écriture détaillée à ne pas utiliser :

$$\begin{aligned}L[u(t)] &= L\left[k_e\,\omega(t)+\frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}+\frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right]\\ &= k_e\,L[\omega(t)]+\frac{JR}{k_c}L\left[\frac{d\omega(t)}{dt}\right]+\frac{JL}{k_c}L\left[\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right]\\ &= k_e\,\Omega(p)+\frac{JR}{k_c}p\,\Omega(p)+\frac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)\end{aligned}$$

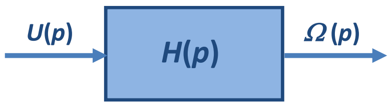
On peut alors écrire la relation, dans le domaine de Laplace, entre la sortie et l'entrée sous la forme :

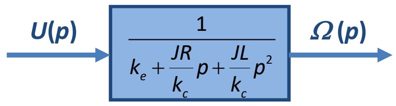
$$\Omega(p)=\frac{1}{k_e+\dfrac{JR}{k_c}p+\dfrac{JL}{k_c}p^2}U(p)$$

Le terme reliant la sortie à l'entrée est caractéristique du comportement du système et de ses équations différentielles. Il s'exprime uniquement en fonction de la **variable symbolique *p*** et des paramètres caractéristiques du système. Ce terme est la **fonction de transfert du moteur à courant continu**.

Soit $H(p)$ la fonction de transfert du moteur à courant continue : $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{JR}{k_c}p+\dfrac{JL}{k_c}p^2}$.

Le système se représente sous une des formes suivantes dans le domaine symbolique :

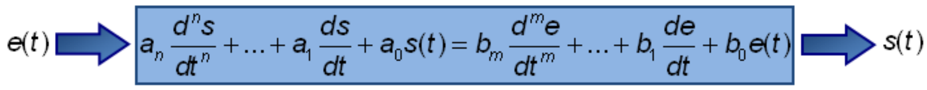




avec $\underbrace{\Omega(p)}_{\text{sortie}}=\underbrace{H(p)}_{\text{fonction de transfert}}\cdot\underbrace{U(p)}_{\text{entrée}}$

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

Soit le modèle traduisant la relation entre une entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :



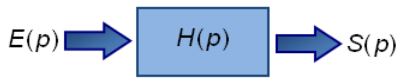
En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de cette équation et **en considérant *n* conditions initiales nulles**, on a :

$$a_n\,p^n\,S(p)+\ldots+a_1\,p\,S(p)+a_0\,S(p)=b_m\,p^m\,E(p)+\ldots+b_1\,p\,E(p)+b_0\,E(p)$$

soit : $$\left[a_n\,p^n+\cdots+a_1\,p+a_0\right]S(p)=\left[b_m\,p^m+\cdots+b_1\,p+b_0\right]E(p)$$

d'où : $$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{b_0+b_1\,p+\cdots+b_m\,p^m}{a_0+a_1\,p+\cdots+a_n\,p^n}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

On appelle fonction de transfert cette fraction de 2 polynômes de la variable p.

> La fonction de transfert est une **fraction de deux polynômes** de la variable p.
>
> La **fonction de transfert**[2] caractérise un **SLCI** de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la **variable symbolique *p*** et des **paramètres** caractéristiques du système. Elle **représente l'équation différentielle** reliant l'entrée à la sortie.
>
> Si $H(p)$ est une fonction de transfert, $S(p)=H(p)\cdot E(p)$
>
> 
>

(2) on l'appelle aussi « transmittance » du système.

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

En **factorisant** chaque polynôme par le **terme de plus petit degré** on obtient la **forme canonique** :

$$H(p)=\frac{K}{p^{\alpha}}\,\frac{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^m}{1+\ldots p+\ldots p^2+\cdots+\ldots p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique
α : classe du système
n : ordre du système (degré dénominateur)

Pour $\alpha=1$, la fonction de transfert peut s'écrire $H(p)=\frac{K}{p}\frac{1+\cdots}{1+\cdots}$: « le système comprend un intégrateur ».

Pour $\alpha=-1$, la fonction de transfert peut s'écrire $H(p)=Kp\frac{1+\cdots}{1+\cdots}$, « le système comprend un dérivateur ».

Exemple : Moteur à courant continu $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_C}p+\dfrac{LJ}{k_C}p^2}=\dfrac{1}{k_e}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{RJ}{k_e k_C}p+\dfrac{LJ}{k_e k_C}p^2\right)}$

ordre : 2
classe : 0
gain statique : $1/k_e$

Application : $H(p)=\dfrac{2+3p+5p^2}{3p^2+4p^3+7p^5}$

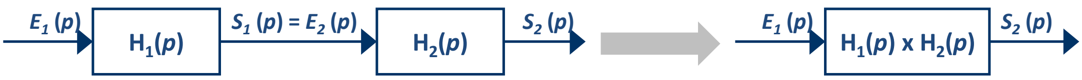
$H(p)=\dfrac{2+3p+5p^2}{3p^2+4p^3+7p^5}$ factoriser par les termes de plus petit ordre

$$\xrightarrow[\text{canonique}]{\text{forme}} H(p)=\frac{2}{3p^2}\,\frac{1+\frac{3}{2}p+\frac{5}{2}p^2}{1+\frac{4}{3}p+\frac{7}{3}p^3}$$

ordre : 5
classe : 2
gain statique : $\frac{2}{3}$

Fonctions de transfert en série

Des composants sont en **série** lorsque **la sortie** d'un composant **est l'entrée** du suivant.



La fonction de transfert équivalente de **composants en série** est égale au **produit des fonctions de transfert** de chacun des composants.

III.3 Prévoir la stabilité à partir de la fonction de transfert

Le polynôme du dénominateur $D(p)$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle à coefficients constants. L'étude des solutions permet de montrer que la stabilité est assurée si les racines de ce dénominateur $D(p)$ sont à partie réelle strictement négative : solution générale en e^{rt} avec r négatif. Les coefficients du dénominateur sont alors nécessairement tous de même signe.

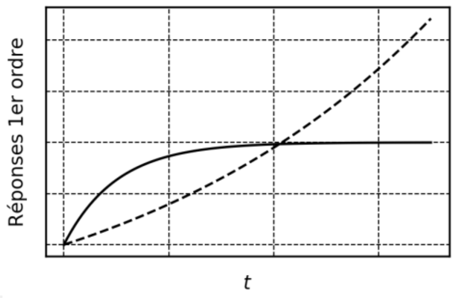
Un modèle est stable si les **pôles**, racines du dénominateur, sont à **partie réelle strictement négatives**.

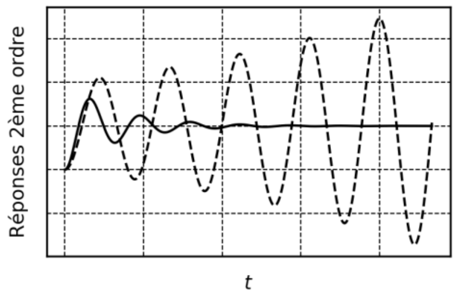
Conséquence : un modèle **stable** est nécessairement de **classe ≤ 0** avec des **coefficients** au dénominateur **strictement**(1) **de même signe**.

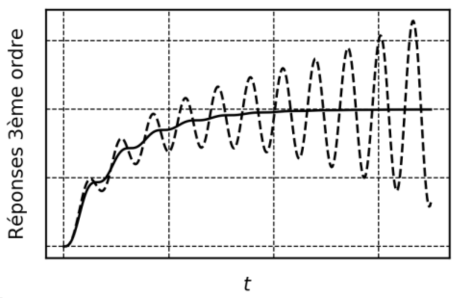
(1) pas de termes nuls.

Ces conditions sont suffisantes pour des modèles d'ordre 1 et 2. Pour des modèles d'ordre 3 ou supérieur, il existe des conditions supplémentaires sur les coefficients.

Ordre	Condition de stabilité :
Ordre 1 $D(p)=a_0+a_1 p$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 2 $D(p)=a_0+a_1 p+a_2 p^2$	Classe ≤ 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 3 $D(p)=a_0+a_1 p+a_2 p^2+a_3 p^3$	Classe ≤ 0, coefficients du dénominateur de même signe $a_1 a_2 > a_0 a_3$





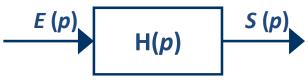


Exemples de réponses stables et instables pour des modèles de classe 0, du premier ordre, du deuxième ordre et du troisième ordre (condition complémentaire non vérifiée pour la réponse non stable).

On peut remarquer les conditions initiales nulles.

III.4 Prévoir la variation finale pour une entrée en échelon

Dans les conditions de Heaviside et le domaine de Laplace, la réponse s'écrit : $S(p)=H(p)\,E(p)$. Il est donc nécessaire de connaître la transformée de l'entrée pour déterminer celle de la réponse.



Transformée de Laplace d'un échelon

Éléments de démonstration en annexe.

> La transformée de Laplace d'un **échelon d'amplitude** E_0 d'instant initial $t=0$, est $\dfrac{E_0}{p}$

Théorème de la valeur finale

> **Si la valeur finale** d'une fonction $s(t)$ **existe**, le **théorème de la valeur finale** permet de la calculer à partir de sa transformée de Laplace :
>
> $$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0^+} p\,S(p) \text{ avec } S(p)=H(p)\,E(p)$$

Exemple : moteur électrique soumis à un échelon de tension d'amplitude $U_0=12$ V avec $H(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_c}p+\dfrac{LJ}{k_c}p^2}$

Modèle stable (paramètres tous positifs), la valeur finale existe pour une entrée en échelon.

Dans le domaine de Laplace, l'entrée est $U(p)=\dfrac{U_0}{p}$. La réponse s'écrit $\Omega(p)=\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_c}p+\dfrac{LJ}{k_c}p^2}\dfrac{U_0}{p}$.

Le théorème de la valeur finale donne : $\omega(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0^+} p\,\Omega(p)=\lim_{p\to 0^+}\cancel{p}\dfrac{1}{k_e+\dfrac{RJ}{k_c}p+\dfrac{LJ}{k_c}p^2}\dfrac{U_0}{\cancel{p}}=\dfrac{U_0}{k_e}$.

Cela correspond à la variation finale de vitesse angulaire induite par la variation de tension U_0 .

Variation finale d'un système stable de classe 0 soumis à un échelon

Soit un système stable de classe 0 modélisé par la fonction de transfert $H(p)$ soumis à un échelon d'amplitude E_0 : $H(p)=K\dfrac{1+b_1\,p+\cdots}{1+a_1\,p+\cdots}$ et $E(p)=\dfrac{E_0}{p}$.

Le théorème de la valeur finale donne :

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0^+} p\,S(p)=\lim_{p\to 0^+} \cancel{p}\,H(p)\frac{E_0}{\cancel{p}}=\lim_{p\to 0^+} H(p)E_0=K\,E_0\,.$$

> Pour un **système stable de classe 0**, de gain statique K, la variation finale pour une entrée en échelon d'amplitude E_0 est $K\,E_0$

La réponse en régime permanent pour une entrée en échelon, correspond à la solution particulière de l'équation différentielle pour une entrée constante. Les dérivées sont donc nulles. Il reste $a_0\,s(t)=b_0\,E_0$, soit $s(t)=(b_0\,/\,a_0)\,E_0$ et $K=b_0\,/\,a_0$.

Variation finale d'un système stable de classe négative soumis à un échelon

Si le système est de classe négative : $H(p)=K\,p^{-\alpha}\dfrac{1+b_1\,p+\cdots}{1+a_1\,p+\cdots}$ d'où : $s(+\infty)=\lim\limits_{p\to 0^+} H(p)E_0=0$.

> Pour un **système stable de classe négative (dit aussi avec dérivateurs)** la variation finale pour une entrée en échelon est nulle.

III.5 Théorème de superposition et précision en poursuite et régulation

Considérons un système à 2 entrées, notées $E(p)$ et $P(p)$ dans le domaine de Laplace.

Si le modèle est linéaire : $\boxed{S(p)=H_1(p)\,E(p)+H_2(p)\,P(p)}$

avec $H_1(p)=\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ (définie avec $P(p)=0$)

et $H_2(p)=\left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ (définie avec $E(p)=0$)

La sortie du système est obtenue en **additionnant** les **réponses à chaque entrée**.

Si $E(p)$ est une **consigne** et $P(p)$ une **perturbation**,

- $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ caractérise le **comportement en poursuite** ;
- $\left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ caractérise le **comportement en régulation**.

Le « théorème » de superposition est une conséquence directe de la linéarité des équations : la réponse à plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée.

> Considérons un **système asservi stable** et les performances pour des entrées en **échelon** :
>
> - l'**erreur statique est nulle** si la fonction de transfert associée est de **classe 0** et de **gain statique unitaire**(1) ($K=1$) ;
> - le système est **insensible aux perturbations** pour une entrée en échelon si les fonctions de transfert associées sont de **classes négatives**(2).

(1) condition nécessaire pour que $\Delta s(+\infty)=\Delta e(+\infty)$

(2) condition nécessaire pour que $\Delta s(+\infty)=0$

IV Comportement temporel, performances et identification des modèles élémentaires

IV.1 Principe de définition d'un modèle de comportement

Définir un **modèle de comportement** consiste à **identifier** un modèle à partir de la **réponse** du système à un **signal d'entrée test**, un **échelon** dans notre cas. La démarche est la suivante :

- le système est considéré comme une « **boite noire** ». À partir d'un état stabilisé, il est soumis à un **échelon d'amplitude connue** sur une unique entrée ;
- la **réponse** obtenue expérimentalement est **comparée** à un **catalogue de réponses types** de façon à **choisir un modèle** de comportement (gain, intégrateur, premier ordre, 2ème ordre…)
- les **paramètres du modèle** sont **identifiés** à partir des relevés expérimentaux.

Le **modèle de comportement** obtenu est toujours à **conditions initiales nulles**.

Seules les **variations par rapport aux conditions expérimentales initiales** sont prises en compte.

Nous allons nous intéresser à des réponses assimilables à celles d'un gain, d'un intégrateur, d'un dérivateur, d'un premier ordre ou d'un deuxième ordre.

IV.2 Comportement temporel d'un gain pur (système à action proportionnelle) : *K*

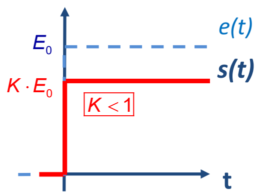
Équation temporelle et fonction de transfert d'un **gain pur**, système à **action proportionnelle**, sont :

$$s(t)=K\,e(t)\ \text{ pour } t\geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p)=K$$

K : **gain statique** $\qquad unité=\dfrac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système à **gain pur** (à action **proportionnelle)** est un **échelon d'amplitude $K\,E_0$** :

$$s(t)=K\,E_0\ \text{ pour } t\geq 0$$



L'identification est réalisée à partir de la **variation finale** avec $\Delta s(+\infty)=K\,E_0$.

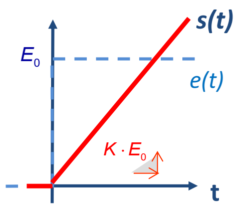
IV.3 Comportement temporel d'un intégrateur : *K/p*

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un **intégrateur** sont :

$$s(t)=K\int_0^t e(\tau)\,d\tau\ \text{ pour } t\geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p)=\frac{K}{p}$$

K : **gain statique** $\qquad unité=\dfrac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}\cdot s^{-1}$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système **intégrateur** est une **rampe de pente KE_0** : $\quad s(t)=K\,E_0\cdot t\ \text{ pour } t\geq 0$



L'identification est réalisée à partir de la **pente *a* en régime permanent** avec $a=K\,E_0$.

Démonstration : $e(\tau)=E_0$ pour $\tau\geq 0$, d'où $s(t)=K\int_0^t e(\tau)\,d\tau=K\int_0^t E_0\,d\tau=K\,E_0\left[t-0\right]=K\,E_0\,t$

IV.4 Comportement temporel d'un dérivateur : *K.p*

La variable symbolique p est homogène à $[T^{-1}]$, soit des s^{-1}.

L'équation temporelle et la fonction de transfert d'un **dérivateur** sont :

$$s(t) = K\frac{d\,e(t)}{dt} \text{ pour } t\geq 0 \quad \xrightarrow{L} \quad H(p) = K\,p$$

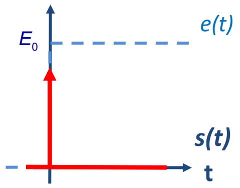
K : **gain statique** $\quad unité = \dfrac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}\cdot s$

(1) Fonction de transformée de Laplace unitaire : $L[\delta(t)] = 1$

La réponse à un **échelon** d'amplitude E_0 d'un système **dérivateur** est une **impulsion d'amplitude $K\,E_0$** [2] :

$$s(t) = K\,E_0\ \delta(t) \text{ avec } \delta(t) \text{ l'impulsion de Dirac}^{(1)}$$

On retiendra : $s(t)$=0 pour t>0



V Comportement, performances et identification d'un modèle du premier ordre

V.1 Comportement temporel et performances d'un modèle du 1er ordre : *K/(1+τ.p)*

Fonction de transfert et équation temporelle

La fonction de transfert correspond à une équation différentielle du **premier degré** écrite sous la forme : $\tau\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\cdot e(t) \quad \text{pour } t \geq 0$

(2) Modèle instable sinon.

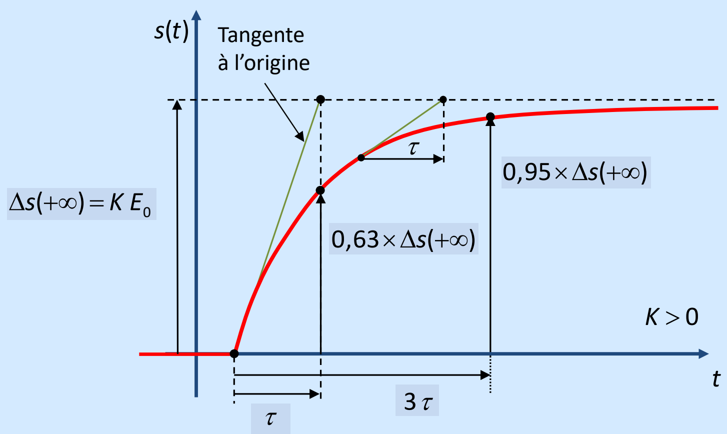
La fonction de transfert d'un **système du premier ordre**, sous l'hypothèse des **conditions initiales nulles**, s'écrit :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}, \qquad \tau > 0^{\,(2)}$$

τ **constante de temps** en secondes $\qquad$ ***K* gain statique** unité = $\dfrac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

Réponse temporelle à un échelon d'amplitude E_0 et performances

La réponse d'un premier ordre à un échelon d'amplitude E_0 a les propriétés suivantes :



Stable si $\tau > 0$, sans dépassement $\qquad$ Temps de réponse à 5% : **$t_{r5\%} \approx 3\,\tau$**

Variation finale : $K\,E_0$

Durée pour atteindre **63%** de la variation totale : constante de temps τ

La droite tangente à l'origine (ou en tout point de la courbe) coupe la valeur finale après une durée τ

On observe que :

– la **constante de temps** τ caractérise le comportement du système en **régime transitoire** (temps pour atteindre 63% puis 95% de la variation finale) ;
– le **gain statique *K*** caractérise le comportement du système en **régime permanent** : variation finale atteinte $= K\,E_0$.

(1) La solution de l'équation différentielle du premier degré est un résultat classique démontré en physique et mathématiques.

La solution(1) de l'équation différentielle avec condition initiale nulle et une entrée en échelon d'amplitude E_0 est $s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ pour $t \geq 0$. Éléments de démonstration à partir cette solution :

- pour t=0, on retrouve bien la condition initiale $s(t) = 0$;
- pour $t \to +\infty$, on obtient la valeur finale et la variation totale, $s(+\infty) = KE_0 = \Delta s(+\infty)$;
- pour $t=\tau$, $s(\tau) = KE_0(1-1/e) \approx 0{,}63\,KE_0 \approx 0{,}63\ \Delta s(+\infty)$;
- la pente à l'origine est $\left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = KE_0\dfrac{1}{\tau}e^{(-0/\tau)} = \dfrac{KE_0}{\tau}$. La droite tangente à l'origine a donc pour équation : $y(t) = (K\,E_0/\tau)\,t$, d'où $y(t) = K \cdot E_0$ pour $t = \tau$;
  Cette propriété est vérifiée en tout point de la courbe : si $y(t) = s'(t_1)(t - t_1) + s(t_1)$, droite tangente à la courbe en t_1, alors $y(t_1 + \tau) = K \cdot E_0$;
- soit t_r tel que $s(t_r) = 0{,}95 \cdot s(+\infty)$. t_r vérifie $KE_0\,(1 - e^{-t_r/\tau}) = 0{,}95 \cdot KE_0$, d'où
  $e^{-t_r/\tau} = 0{,}05 \Rightarrow t_r = -\tau \cdot \ln(0{,}05) \approx 3 \cdot \tau$.

V.2 Identifier les paramètres d'un modèle du premier ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un premier ordre :

- existence **valeur finale** ;
- **pas de dépassement** ;
- **pente à l'origine** pouvant être non nulle ;
- **pas de point d'inflexion**.

Les paramètres du **modèle du premier ordre** sont identifiés ainsi :

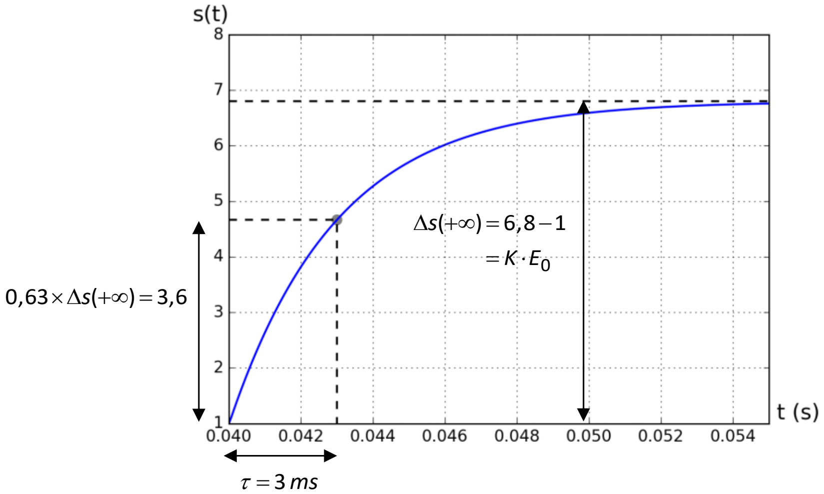
- K à partir de la **variation finale** et de la relation $\Delta s(+\infty) = KE_0$.
- τ à partir de la durée de réponse pour une variation de **63%**.

Exemple : à partir de la réponse expérimentale à un échelon d'amplitude 2, identifier les paramètres du système modélisé par un premier ordre.

Q1 - Identifier la valeur de K : la variation totale vérifie $\Delta s(+\infty) = KE_0$, d'ou K=5,8/2=2,9

Q2 - Identifier la valeur de τ

$0{,}63 \times \Delta s(+\infty) = 3{,}6$, correspondant à une durée depuis l'origine de 3 ms.



Q3 - En déduire la fonction de transfert du premier ordre : $H(p) = \dfrac{2{,}9}{1 + 3.10^{-3}p}$

VI Comportement, performances et identification d'un modèle du deuxième ordre

VI.1 Comportement temporel, performances d'un modèle du 2ème ordre : $K/[1+2z/\omega_0.p+(p/\omega_0)^2]$

Fonction de transfert

La fonction de transfert correspond à une équation différentielle de degré 2 écrite sous la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t) \text{ pour } t>0.$$

La fonction de transfert d'un **système du deuxième ordre**, sous l'hypothèse des **conditions initiales nulles**, s'écrit :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \qquad \omega_0>0,\, z>0 \ ^{(1)}$$

(1) Modèle instable sinon.

avec ω_0, **pulsation propre** (rad/s)

z (noté parfois m ou ξ), **facteur d'amortissement** (sans unité)

K, **gain statique**, unité = $\dfrac{\text{unité de la sortie}}{\text{unité de l'entrée}}$

Comme pour l'équation du premier degré, la solution de l'équation différentielle du second degré est un résultat classique démontré en physique et mathématiques. La recherche de la solution conduit à déterminer les racines d'une équation du second degré de déterminant $\Delta=4\omega_0^2(z^2-1)$ donnant des **réponses différentes** suivant la valeur du **facteur d'amortissement** z. Si $z\geq 1$ les racines sont réelles, complexes sinon. Les équations temporelles sont données pour information.

Forme générale des réponses non oscillatoires : z ≥ 1

Si **z > 1**, un second ordre s'écrit aussi comme un **produit de 2 premiers ordres** :

$$H(p)=\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ avec } \tau_1+\tau_2=\frac{2z}{\omega_0} \text{ et } \tau_1\tau_2=\frac{1}{\omega_0^2} \ ^{(2)}$$

Si $z>1{,}1$ et après les instants initiaux, la réponse est proche de celle d'un **premier ordre** de constante de temps τ_2 **retardée** de τ_1.

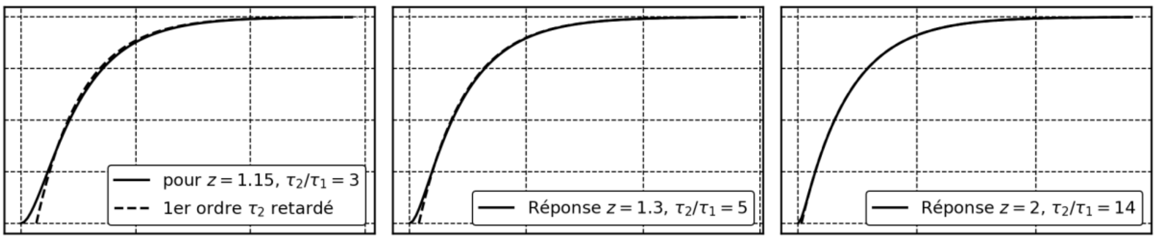
(2) On trouve :

$$\tau_1=\frac{1}{\omega_0}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)$$

et

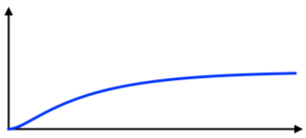
$$\tau_2=\frac{1}{\omega_0}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right).$$

Exemples de réponse :



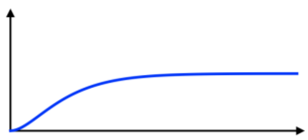
Les équations des réponses temporelles sont :

Si $z>1$: $s(t)=KE_0\left[1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1 e^{-t/\tau_1}-\tau_2 e^{-t/\tau_2}\right)\right]$ pour $t\geq 0$



Si $z=1$: $s(t)=KE_0\left(1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right)$ pour $t\geq 0$

avec $\tau=1/\omega_0$



Forme générale des réponses oscillatoires amorties : z < 1

Si z<1, la réponse temporelle a pour équation :

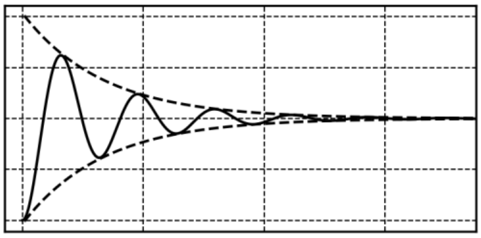
$$s(t) = KE_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\omega_0 z t}\sin(\omega_a t + \varphi)\right) \text{ pour } t \geq 0, \text{ avec } \varphi = \arctan\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \text{ et } \omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$$

Rappel : la relation entre fréquence et période est donnée par $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

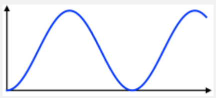
La forme générale d'une réponse **oscillatoire amortie** est une **sinusoïde**, de pulsation amortie $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$, **centrée sur la valeur finale** et comprise **entre 2 exponentielles**.

La **pseudo-période** est la durée entre deux extrémums de même sens : $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$

Exemple de réponse pour $z = 0{,}15$:



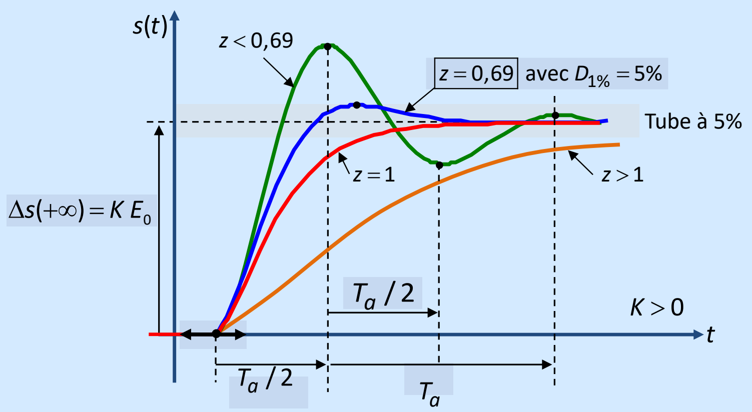
Le cas z=0, régime oscillatoire non amorti, correspond aux systèmes harmoniques. La valeur finale n'existe pas, le temps de réponse à 5% et le nombre de dépassements ne sont pas définis. Il ne sera pas étudié ici.



$s(t) = KE_0\,(1 - \cos(\omega_0 t))$

Caractéristiques de la réponse temporelle

La réponse d'un deuxième ordre à un échelon d'amplitude E_0 a les propriétés suivantes :



Variation totale : $\Delta s(+\infty) = K\,E_0$

Pente à l'origine nulle

Pas de dépassement pour **z ≥ 1**. **Dépassements** en nombre infini pour **z<1**

Pour ***z* ≈ 0,7** : **un seul** dépassement >1% qui vaut **5%** et **temps de réponse minimal**.

La valeur du kième dépassement relatif est donnée par l'abaque en annexe **ou** une formule(1).

(1) valeur du dépassement relatif d'ordre k :

$$D_{k\%} = e^{\frac{-z.k.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Le **temps de réponse réduit**(2) $tr_{5\%}\cdot\omega_0$, sans unité, ne dépend que du facteur d'amortissement z :

- lorsque z=0,7, $tr_{5\%}\cdot\omega_0 \approx 3$;
- lorsque z=1, $tr_{5\%}\cdot\omega_0 \approx 5$;

(2) Il n'existe pas d'expression simple qui permet de calculer $tr_{5\%}$ ***.***

On utilise un abaque qui nous donne la valeur du temps de réponse réduit ($= tr_{5\%}\cdot\omega_0$ ***) en fonction du facteur d'amortissement.***

L'abaque montre qu'à un facteur d'amortissement correspond un temps de réponse réduit.
Par conséquent, pour un même facteur z, plus ω_0 augmente, plus $tr_{5\%}$ diminue et donc plus le système est rapide.

Application : utilisation des abaques pour une réponse à un échelon d'un système du 2ème ordre.

A2 - Pour z=0,3, que valent les dépassements relatifs supérieurs à 1%.

Pour z=0,3, on trouve 4 dépassements supérieurs à 1% : D1%=37%, D2%=14%, D3%=5% et D4%=2%.

A3 - Pour quelles valeurs de z les dépassements relatifs sont inférieurs à 1% ?

La valeur limite correspond à l'intersection de la courbe n=1 avec l'axe des abscisses. Pour 0,82<z<1, les dépassements ont une amplitude inférieure à 1% (non visible à l'œil).

A4 - Sur une réponse à un échelon obtenue expérimentalement, on relève un premier dépassement relatif de 25%. Quel est le facteur d'amortissement si le système est modélisé par un 2ème ordre ?

On obtient un facteur d'amortissement de 0,4.

A5 - Que vaut le temps de réponse réduit pour ce facteur d'amortissement ? Indiquer approximativement le point d'entrée dans le tube.

Pour z=0,4, on trouve $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 7{,}5$.

Pour z=0,4, on D3%<5% et D2%>5%. Le point d'entrée est entre le 2ème et le 3ème dépassement.

VI.2 Identifier les paramètres d'un modèle du deuxième ordre

Condition pour assimiler le modèle à un 2ème ordre

Conditions pour que la réponse à un échelon s'apparente à celle d'un deuxième ordre :

- existence **valeur finale** ;
- **pente à l'origine** pouvant être nulle ;
- **un point d'inflexion** sur la montée initiale ;

avec réponse oscillatoire amorti (**z < 1**), s'il **existe des dépassements** ;

avec réponse non oscillatoire (z ≥ 1), sinon.

Identification des paramètres pour une réponse oscillatoire amortie

Pour un **modèle du deuxième ordre** avec dépassements, sont identifiés :

- ***K*** à partir de la **variation totale** et de la relation $\Delta s(+\infty) = KE_0$;
- ***z*** à partir du **premier dépassement *D*1%** . Abaque ou $z = \sqrt{\dfrac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2 + (\ln D_{1\%})^2}}$
- ***ω*0** à partir de la durée entre deux extrémums. On en déduit la **pseudo période *T*a** puis ω_0 par la relation $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - z^2}$ (1).

(1) La valeur de tr5% et l'abaque du temps de réponse réduit sont utilisés lorsque la valeur du premier dépassement n'est pas mesurable avec précision.

Identification des paramètres pour une réponse non oscillatoire

Pour un **modèle du deuxième ordre** sans dépassement, on suppose la courbe assimilable à un **premier ordre de constante de temps τ_2 ayant un retard τ_1** ; hypothèse valable si **$\tau_2/\tau_1 > 3$ (à vérifier)**. Les caractéristiques sont alors déterminées ainsi :

- ***K*** à partir de la variation totale ;
- **τ_2** à partir de l'intersection d'une droite **tangente à la courbe** avec l'asymptote horizontale ;
- **τ_1** à partir de la **durée de réponse à 63%** correspondant à une durée **$\tau_1 + \tau_2$**.

z et ω_0 sont déterminés par identification : $\dfrac{1}{\omega_0^2} = \tau_1 \tau_2$ et $\dfrac{2z}{\omega_0} = \tau_1 + \tau_2$.

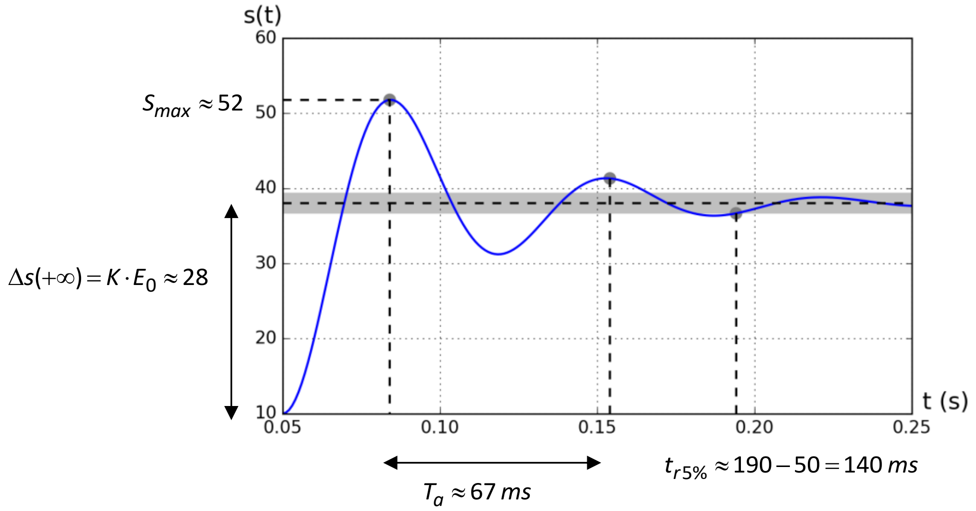
Exemple d'identification à partir d'une réponse oscillatoire amortie : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude E_0=2 est donnée ci-dessous.

La réponse s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre oscillatoire amortie : asymptote horizontale, dépassements d'amplitudes décroissantes, tangente à l'origine nulle et point d'inflexion.

Ces observations permettent de proposer comme fonction de transfert du modèle de comportement du système :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec } z<1$$

Les trois paramètres à identifier sont : le gain statique ***K***, le facteur d'amortissement **z** et la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$.



Q4 - Identifier la valeur de K

La variation totale vérifie : $\Delta s(+\infty)=KE_0$, d'ou K=28/2=14

Q5 - Identifier la valeur de z

On relève $D_{1\%}=\left|\frac{s_{max}-s_\infty}{\Delta s_\infty}\right|\approx\frac{52-38}{28}\approx 50\,\%$

Sur l'abaque qui lie le dépassement au facteur d'amortissement on trouve : $z\approx 0{,}21$.

On peut aussi utiliser la formule : $0{,}5=D_{1\%}=e^{\frac{-z\cdot\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\Rightarrow \ln 0{,}5=\frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}\Rightarrow\ (\ln 0{,}5)^2.(1-z^2)=z^2.\pi^2$

$\Rightarrow\ (\ln 0{,}5)^2=z^2.\left(\pi^2+(\ln 0{,}5)^2\right)$

donc $z\approx\sqrt{\frac{(\ln 0{,}5)^2}{\pi^2+(\ln 0{,}5)^2}}\approx 0{,}21$

Q6 - Déterminer la pulsation amortie puis ω_0

On relève $T_a\approx 67\,ms$ et $tr_{5\%}\approx 140\,ms$

Avec $\omega_a=2\pi/T_a$ et $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$ on en déduit : $\omega_0=\frac{2\pi}{67.10^{-3}\sqrt{1-0{,}21^2}}$ donc ω_0≈95 rad/s

Q7 - En déduire une fonction de transfert représentative du comportement du système

$$H(p)=\frac{14}{1+\frac{2\times 0{,}21}{95}p+\frac{p^2}{95^2}}$$

Exemple d'identification à partir d'une réponse non oscillatoire : considérons un système dont la fonction de transfert est inconnue. Sa réponse expérimentale à un échelon d'amplitude E_0=2 est donnée ci-dessous.

Elle s'apparente à la réponse d'un système du 2ème ordre non oscillatoire : asymptote horizontale mais pas de dépassement, pente à l'origine nulle et un seul point d'inflexion.

Le modèle de comportement proposé a pour fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{K}{(1+\tau_1\cdot p)(1+\tau_2\cdot p)}$.

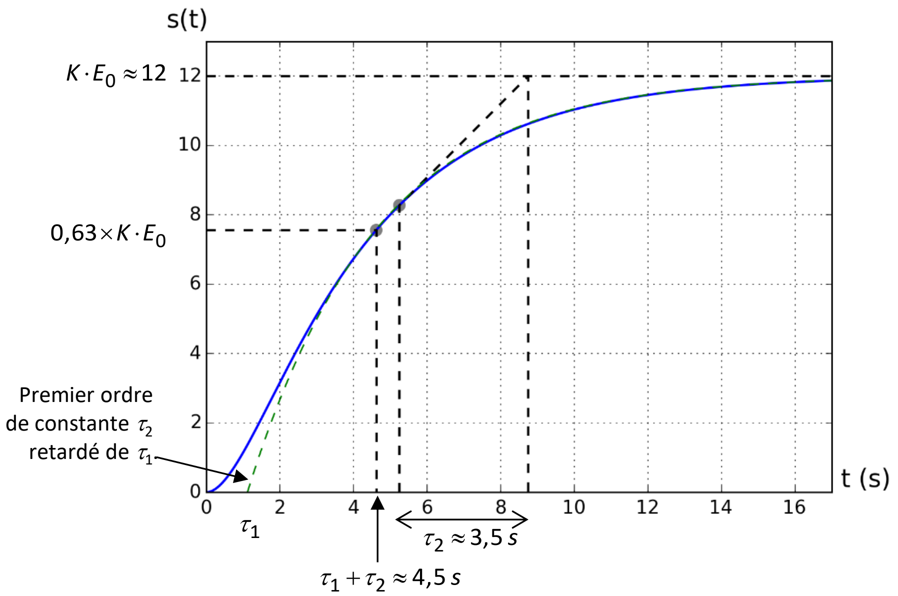
Les trois paramètres à identifier sont : le gain statique ***K*** et les deux constantes de temps $\boldsymbol{\tau_1}$ et $\boldsymbol{\tau_2}$.

Q8 - Déterminer les constantes de temps.

À partir d'un point de la courbe suffisamment éloigné du point d'inflexion, après avoir tracé la tangente en ce point et son intersection avec l'asymptote horizontale, on relève sur la courbe :

$s(+\infty)\approx 12,\ \tau_2 \approx 3{,}5\,s$

Le temps de réponse à 63% est de 4,5 s. D'où, $\tau_1 \approx 4{,}5-\tau_2 \approx 1\,s$



Q9 - Déterminer la fonction de transfert et les caractéristiques de la fonction

$K=\Delta s(+\infty)/E_0 \approx 6$ d'ou : $H(p)=\dfrac{6}{(1+p)(1+3{,}5p)}$

Par développement, on peut identifier z et ω_0 : $H(p)=\dfrac{6}{(1+p)(1+3{,}5p)}=\dfrac{6}{1+4{,}5\,p+3{,}5\,p^2}$

D'où, $\dfrac{1}{\omega_0^2}=3{,}5$, soit $\omega_0=0{,}53$ rad/s,

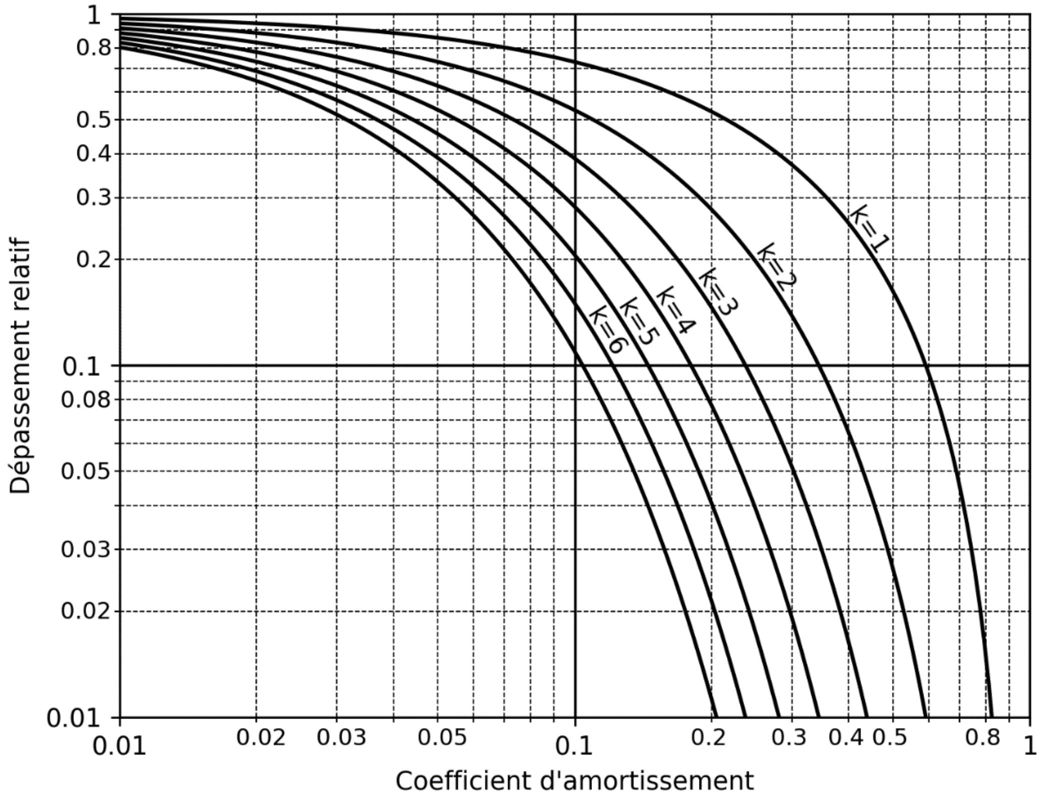
et $\dfrac{2z}{\omega_0}=4{,}5$, soit $z=1{,}2$.

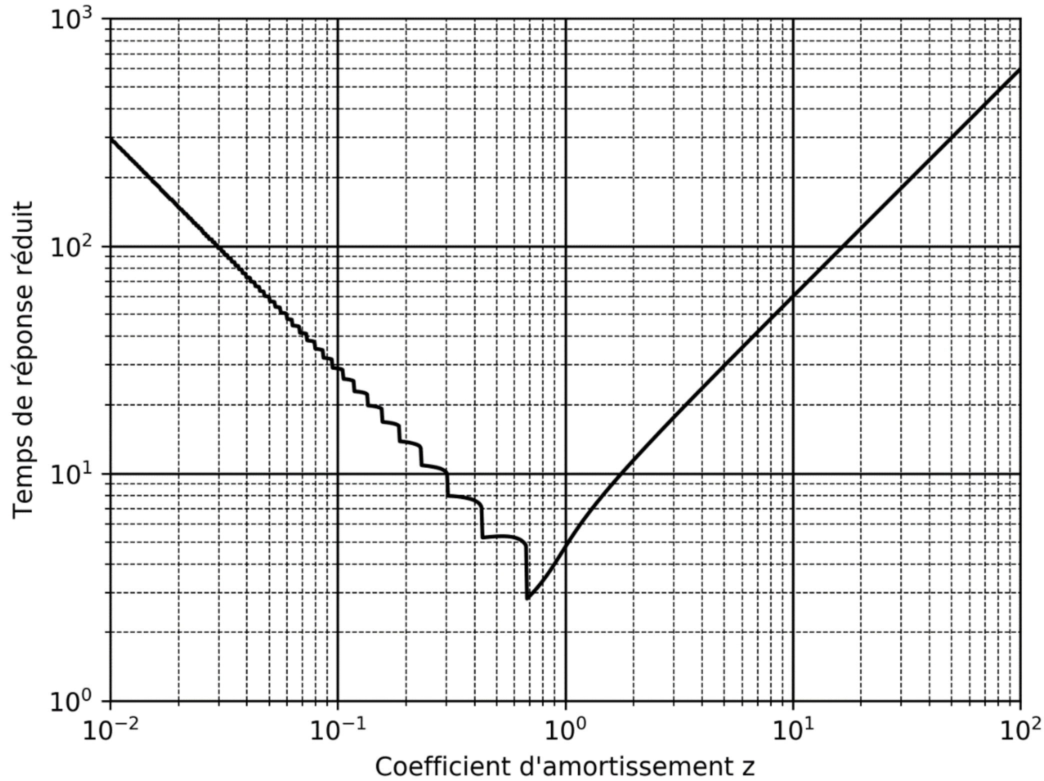
Et $H(p)=\dfrac{6}{(1+p)(1+3{,}5p)}=\dfrac{6}{1+\dfrac{2\times 1{,}2}{0{,}53}p+\dfrac{p^2}{0{,}53^2}}$

Abaques

$$z=\sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{(\ln D_{1\%})^2+\pi^2}}$$

$$D_{k\%}=e^{\frac{-z.k.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$





Annexe : sur la transformée de Laplace

- Transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude E_0

Soit $f(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0 \\ E_0 \text{ si } t\geq 0\end{cases}$, $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = E_0 \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = E_0\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{E_0}{p}$

- Transformée de Laplace d'une rampe de pente A

Soit $f(t)=\begin{cases}0 \text{ si } t<0 \\ At \text{ si } t\geq 0\end{cases}$, $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = A\int_0^{+\infty} t\, e^{-pt}dt$.

L'intégration est faite par partie, $\int u\, v' dx = u v - \int u' v\, dx$, avec $u=t$ et $v'=e^{-pt}$:

$$F(p)=A\left[t\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} - A\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}dt = A\left[0-0\right]+\frac{A}{p}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{p^2}$$

- Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f continue sur $]0,+\infty[$, dérivable par morceau et à dérivée continue par morceau.

$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{df(t)}{dt}dt$. En utilisant l'intégration par partie avec $u=e^{-pt}$ et $v=\frac{df(t)}{dt}$ on obtient :

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -p\, e^{-pt} f(t)dt .$$

La condition d'existence de la transformée de Laplace de $f(t)$ impose $\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t)=0$ (nécessaire pour que l'intégrale converge). D'où : $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=0-f(0)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = -f(0)+p\,L\left(f(t)\right)$.

Dans les conditions de Heaviside $f(0)=0$. On obtient $L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=p\,F(p)$.

Par récurrence, on montre aussi que, sous les conditions de Heaviside, $L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)=p^n F(p)$.

- Transformée de Laplace d'une intégrale

Posons $g(t)=\int_0^t f(x)dx$ et $g(0)=A_0$. On a aussi $\frac{dg(t)}{dt}=f(t)$.

$$L\left(\frac{dg(t)}{dt}\right)=-g(0)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}g(t)dt = -g(0)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt = -g(0)+p\,L\left(\int_0^t f(x)dx\right)$$

D'où : $L\left(f(t)\right)=-A_0+p\,L\left(\int_0^t f(x)dx\right) \Leftrightarrow L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{L\left(f(t)\right)}{p}+\frac{A_0}{p}$

soit, dans les conditions de Heaviside, $L\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(p)}{p}$

- Théorème de la valeur finale

Considérons une fonction $f(t)$ convergente. À partir de la transformée de la dérivée d'une fonction et de la limite quand *p* (au sens de son module si *p* est complexe) tend vers 0 :

$$\lim_{p\to0} L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\lim_{p\to0}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{df(t)}{dt}dt = \lim_{p\to0}\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}dt$$ (théorème de convergence dominée).

$$= f(+\infty)-f(0)$$

De plus $\lim_{p\to0} L\left(\frac{df(t)}{dt}\right)=\lim_{p\to0}\left(p\,F(p)-f(0)\right)=\lim_{p\to0} p\,F(p)-f(0)$

D'où : $\lim_{p\to0} p\,F(p)-f(0)=f(+\infty)-f(0) \Leftrightarrow f(+\infty)=\lim_{p\to0} p\,F(p)$

Savoirs

Je connais :

- ☐ Les particularités et hypothèses d'un SLCI
- ☐ la transformation de Laplace et ses propriétés
- ☐ les conditions de stabilités pour des modèles jusqu'à l'ordre 3
- ☐ le théorème de la valeur finale
- ☐ les conditions pour que l'erreur statique soit nulle et le système insensible à une perturbation
- ☐ la forme des fonctions de transfert des systèmes proportionnels, intégrateurs et dérivateurs et les caractéristiques de leurs réponses à un échelon test
- ☐ la forme de la fonction de transfert d'un système du 1er ordre et les caractéristiques de ses réponses à un échelon test
- ☐ la forme de la fonction de transfert d'un système du 2ème ordre et les caractéristiques de ses réponses à un échelon test
- ☐ la démarche d'identification temporelle des systèmes

Savoir-faire

Je sais :

- ☐ observer les performances d'un SLCI
- ☐ déterminer la fonction de transfert d'un SLCI
- ☐ mettre sous forme canonique et identifier gain statique, ordre et classe
- ☐ déterminer une valeur finale
- ☐ tracer le signal de sortie d'un système du 1er ou 2ème ordre en réponse à une entrée en échelon
- ☐ identifier un modèle de comportement d'un système à partir de sa réponse à un échelon en modèle de type gain pur, intégrateur, 1er ordre et 2ème ordre