TD 3 : IDENTIFIER UN MODELE DE COMPORTEMENT DU DEUXIEME ORDRE

C 04

CORRIGE

Exercice 3.1 : CAMERA

Q1 : Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}=\frac{9800}{10000+600\,p+35.p^2}=\frac{0{,}98}{1+0{,}06\,p+0{,}0035\,p^2}=\frac{K}{1+\frac{2\,z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$, ordre 2 de classe 0.

D'où, par identification : $K=0{,}98$, $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{0{,}0035}}\approx 16{,}9$ rad/s et $\frac{2z}{\omega_0}=0{,}06 \Leftrightarrow z=\frac{0{,}06}{2}\sqrt{\frac{1}{0{,}0035}}\approx 0{,}51$

Q2 : En déduire, si sa réponse à un échelon est non oscillatoire ou oscillatoire amortie. Si elle est définie, indiquer la valeur de la pseudo-période notée T_a.

$z<1$ donc la réponse est oscillatoire amortie avec $\boxed{T_a=\frac{2\pi}{\omega_a}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}=0{,}43\text{ s}}$

Q3 : Calculer le temps de réponse à 5 % de ce système soumis à une entrée de type échelon.

En utilisant l'abaque qui lie temps de réponse réduit et facteur d'amortissement :

$$z=0{,}51 \Rightarrow tr_{5\%}\times\omega_0\approx 5{,}2 \Rightarrow \boxed{tr_{5\%}\approx\frac{5{,}2}{\omega_0}\approx 0{,}31\text{ s}}$$

Q4 : Donner, dans ce cas, le nombre de dépassements d'amplitude supérieure à 1% de la réponse $\theta(t)$. Indiquer, pour chacun d'eux, leur valeur relative et leur valeur absolue.

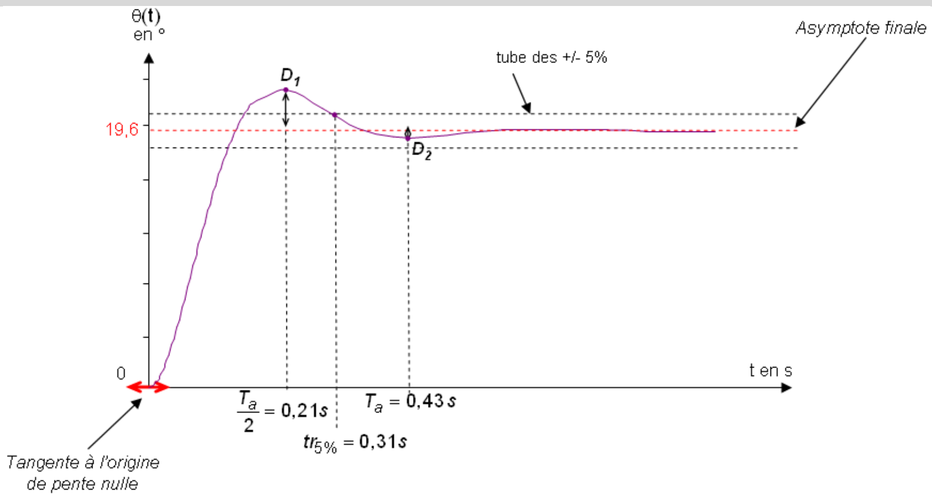
En utilisant l'abaque qui donne le nombre et la valeur des dépassements en fonction du facteur d'amortissement.

$z=0{,}51 \Rightarrow$ 2 dépassements >1% : $D_{1\%}=0{,}15=\frac{15}{100}=15\%$ *et* $D_{2\%}=0{,}02=\frac{2}{100}=2\%$

Or $\Delta\theta(+\infty)=K\,\theta_c(+\infty)=0{,}98\times 20=19{,}6\,°$

donc $\boxed{D_1=\left|D_{1\%}\times\Delta\theta(+\infty)\right|=0{,}15\times 19{,}6=2{,}9°\text{ et }D_2=\left|D_{2\%}\times\Delta\theta(+\infty)\right|=0{,}02\times 19{,}6=0{,}4°}$

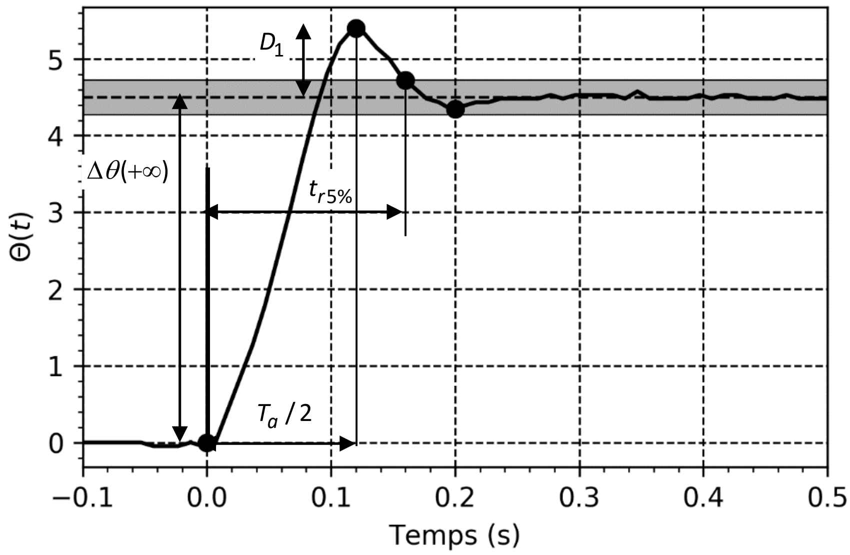
Q5 : Tracer l'allure de la réponse $\theta(t)$ en précisant les points caractéristiques.



Positionner les points caractéristiques et les tangentes avant de tracer la courbe…

Exercice 3.2 : **REPONSE D'UN ASSERVISSEMENT ANGULAIRE**

Q1 : Déterminer les performances en poursuite de rapidité et de stabilité (pour les 2 premiers dépassements relatifs) et de précision de la réponse expérimentale.



<u>Performances de stabilité</u> : il existe une valeur finale en réponse à un échelon, le système est stable.

Par lecture du graphique on trouve : $\theta(+\infty) = \Delta\theta(+\infty) = 4{,}5°$

Deux dépassements visibles.

Premier dépassement : $D_{1\%} = \left|\dfrac{\theta(t_1) - \theta(+\infty)}{\Delta\theta(+\infty)}\right| \approx \dfrac{5{,}4 - 4{,}5}{4{,}5} = 20\%$

Deuxième dépassement : $D_{2\%} = \left|\dfrac{\theta(t_2) - \theta(+\infty)}{\Delta\theta(+\infty)}\right| \approx \left|\dfrac{4{,}34 - 4{,}5}{4{,}5}\right| = 3{,}5\%$

<u>Performance de rapidité</u> :

Le tube à 5% correspond au domaine : $\theta(+\infty) \pm 0{,}05\Delta\theta(+\infty) = 4{,}5 \pm 0{,}22°$.

On trouve $t_{r5\%} = 0{,}16$ s.

<u>Performance de précision :</u> Erreur statique $e_{pour} = \Delta\theta_c(+\infty) - \Delta\theta(+\infty) = 5 - 4{,}5 = 0{,}5°$

Q2 : Déterminer un modèle de comportement de cet asservissement à partir de la variation finale et du premier dépassement.

La réponse présente un dépassement, le système est modélisable par un second ordre de classe 0 avec un facteur d'amortissement <0,7 (premier dépassement >5%).

<u>Gain</u> : $K = \dfrac{\Delta\theta(+\infty)}{\Delta\theta_c(+\infty)} = \dfrac{4{,}5}{5} = 0{,}9$

<u>Facteur d'amortissement</u> : $z = \sqrt{\dfrac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2 + (\ln D_{1\%})^2}}$ avec $D_{1\%} \approx 0{,}2$, d'où z=0,46. Par la lecture de l'abaque, on trouve z=0,45.

<u>Pulsation propre</u> : Le premier dépassement arrive après une durée $t_1 = \dfrac{T_a}{2} = 0{,}12$ s.

D'où : $T_a = 0{,}24$ s, $\omega_a = \dfrac{2\pi}{T_a} =$ 26,2 rad/s et $\omega_0 = \dfrac{\omega_a}{\sqrt{1 - z^2}}$ =29,5 rad/s.

On obtient la fonction de transfert : $\dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \dfrac{0{,}9}{1 + \dfrac{2 \cdot 0{,}46}{29{,}5}p + \dfrac{p^2}{29{,}5^2}} = \boxed{\dfrac{0{,}9}{1 + 0{,}032p + 1{,}1.10^{-3}p^2}}$

Q3 : Déterminer les performances de rapidité, de stabilité et de précision du modèle de comportement en poursuite. D'où peuvent provenir les écarts constatés ?

Premier dépassement : sauf erreur de calcul, le modèle de comportement donne un premier dépassement cohérent avec la réponse expérimentale.

Deuxième dépassement : $D_{2\%} = e^{\frac{-z2\pi}{\sqrt{1-z^2}}} = 4\%$, résultat que l'on retrouve par l'abaque.

Ce résultat est proche du comportement expérimental.

Nombre de dépassements : les autres dépassements du modèle de comportement sont d'amplitude inférieure à 1%. Cela est aussi cohérent avec la réponse expérimentale.

Instant du 2ème dépassement : $t_2 = T_a = 0{,}24$ s, alors qu'expérimentalement $t_{2\_\exp} = 0{,}2$ s.

Temps de réponse à 5% : pour z=0,46, par lecture de l'abaque, on trouve $t_{r5\%} \cdot \omega_0 \approx 5$, soit $t_{r5\%} \approx \frac{5}{29{,}5} = 0{,}17$ s.

Résultat proche de celui obtenu expérimentalement.

Erreur statique :

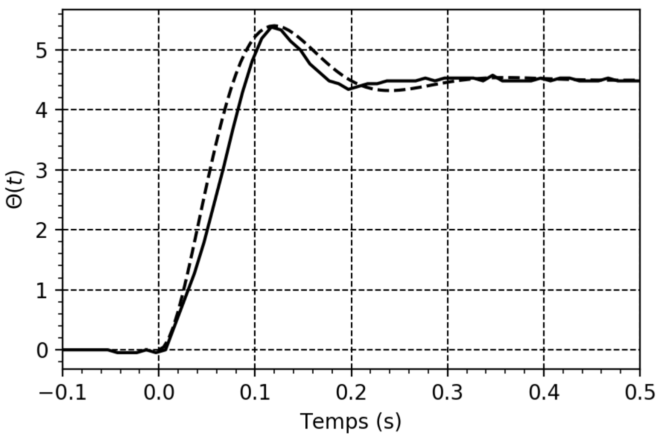
> sauf erreur de calcul, l'erreur statique du modèle doit correspondre à la réponse expérimentale puisqu'elle ne dépend que du gain statique, lui-même identifier sur la réponse expérimentale.

Pour le modèle de comportement $e_{pour} = \Delta\theta_c(+\infty) - \Delta\theta(+\infty) = \theta_0 - K\,\theta_0 = 5(1-0{,}9) = 0{,}5°$

On retrouve l'erreur statique expérimentale.

L'ensemble de ces résultats permettent de valider l'identification.

> La superposition des réponses expérimentales et du modèle de comportement donne la figure ci-contre.
>
> On remarque que le point associé au premier dépassement est bien identique sur les 2 courbes.
>
> De même, la valeur finale est identique.

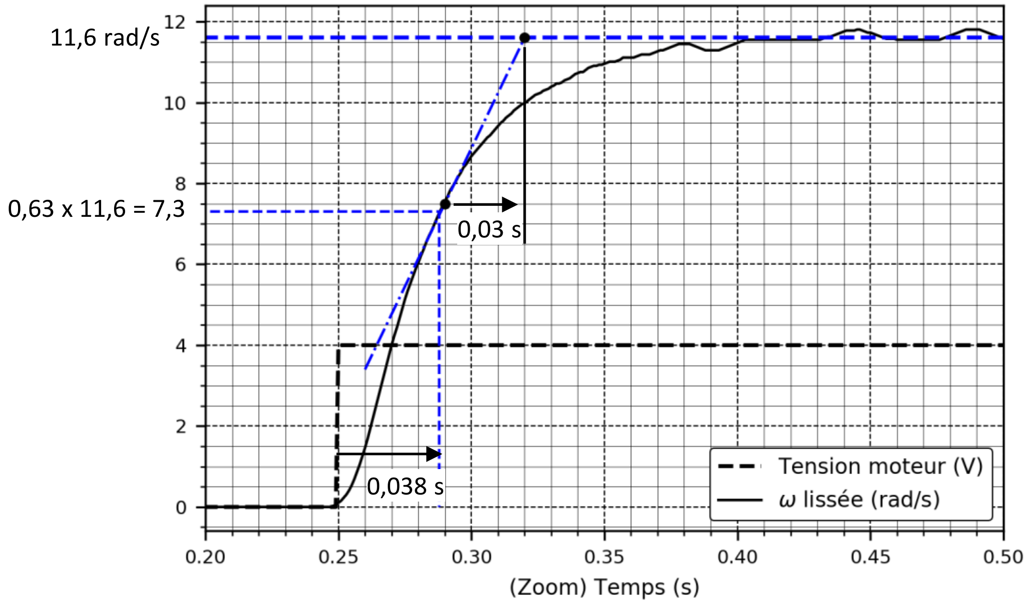


> La première montée du résultat expérimental est légèrement plus lente et la pseudo pulsation plus grande.
>
> Ces différence peuvent s'expliquer par : un retard (la réponse débute quelque dixièmes de secondes après l'échelon) ; une saturation en vitesse lors de la montée initiale (les moteurs ont une vitesse maximale), et des frottements secs qui dissipent l'énergie plus rapidement.

Exercice 3.3 : **ASSERVISSEMENT EN POSITION D'UN MOTEUR**

Détermination d'un modèle de comportement de la chaîne de puissance

Q1 : Proposer un modèle de comportement pour l'ensemble moteur – réducteur. En déterminer les paramètres caractéristiques.



Réponse sans dépassement avec un point d'inflexion sur la montée et pouvant présenter une pente nulle en condition initiale.

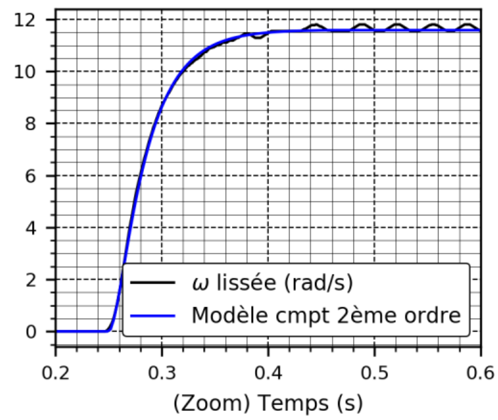
L'ensemble moteur-réducteur est modélisé par un second ordre avec un facteur d'amortissement $z > 1$, sous la forme : $\dfrac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \dfrac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$.

Variation finale : $\Delta\omega(+\infty) \approx$ 11,6 rad/s, d'où $K \approx 11{,}6 / 4 = 2{,}9$ rad.s^{-1}/V.

À partir d'une droite tangente à la courbe : $\tau_2 \approx 0{,}03$ s

À partir de l'instant correspondant à une variation de 63%, $\omega_{63\%} = \omega_0 + 0{,}63 \times \Delta\omega(+\infty) = 0{,}63 \times 11{,}6 = 7{,}3$ rad/s : $\tau_1 + \tau_2 \approx 0{,}038$ s , d'où $\tau_1 \approx 0{,}038 - 0{,}03 \approx 0{,}008$ s .

La fonction de transfert identifiée est : $\boxed{\dfrac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \dfrac{2{,}9}{(1+0{,}008\,p)(1+0{,}03\,p)}}$.



> Les réponses du modèle identifié et expérimentale sont tracées ci-contre et montre une bonne adéquation sur l'ensemble des valeurs.

D'où, par identification sur la forme générale :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \tau_1\tau_2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \approx 64 \text{ rad/s}$$

et $\dfrac{2z}{\omega_0} = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow z = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau_1\tau_2}} \approx$ 1,22

Q2 : En quoi ce modèle est-il moins pertinent que le modèle identifié précédemment.

Le modèle du premier ordre ne rend pas bien compte de la réponse au début du comportement transitoire (début de la réponse).

> L'utilisation de ce modèle donne tout de même une bonne approximation du comportement général du système (même valeur finale, pas de dépassement, temps de réponse à 5% presque identique, valeurs intermédiaires proches).

Q3 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}$ et les paramètres caractéristiques K, z et ω_0 en fonction de τ, K_m et K_c.

On trouve : $H(p)=\dfrac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)}=\dfrac{K_m K_c}{\tau p^2+p+K_m K_c}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{K_m K_c}p+\dfrac{\tau}{K_m K_c}p^2}$

Fonction de transfert de classe 0, stable (les constants sont >0), de gain unitaire.

On pose $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$. Par identification, les paramètres caractéristiques sont :

$K=1$ $\quad\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_m K_c}{\tau}}$ $\quad\dfrac{2z}{\omega_0}=\dfrac{1}{K_m K_c}\Leftrightarrow z=\dfrac{\omega_0}{2}\dfrac{1}{K_m K_c}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{K_m K_c}{\tau}}\dfrac{1}{K_m K_c}$, d'où : $z=\dfrac{1}{2\sqrt{\tau K_m K_c}}$

> Il est important de simplifier l'expression de z en utilisant la relation $\dfrac{\sqrt{A}}{A}=\dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Validation du modèle de l'asservissement

Q4 : Pour $K_c=9$ V/rad, déterminer les valeurs numériques de z, ω_0, $D_{1\%}$, $D_{2\%}$ et $t_{r5\%}$ prédites par le modèle de l'asservissement.

Par application numérique, on trouve : $z = 0,5$ $\quad\omega_0=26,2$ rad/s

d'où : $D_{1\%}=e^{\frac{-z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$ = 16% $\quad$ et $D_{2\%}=e^{\frac{-z2\pi}{\sqrt{1-z^2}}}=2,6\%$.

> L'utilisation de l'abaque associé aux dépassements relatifs permet trouver ou de vérifier ces résultats.

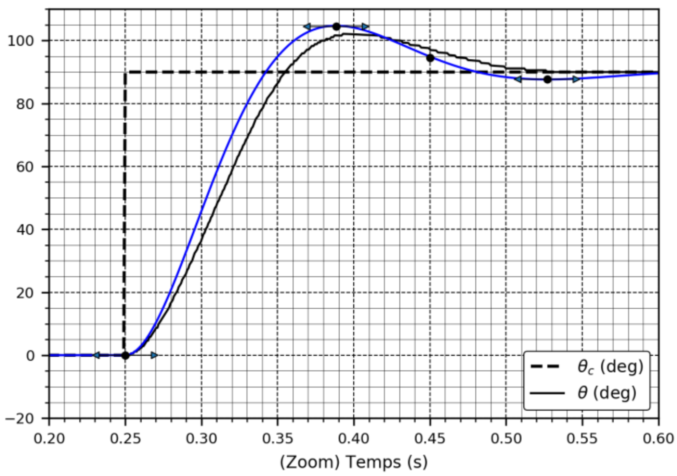
Temps de réponse réduit : $t_{r5\%}\,\omega_0\approx 5,2$ d'où $t_{r5\%}\approx 0,2$ s .

> Le temps de réponse réduit est obtenu par lecture de l'abaque associé. Il n'y a pas de formule à appliquer.

Q5 : Placer sur le graphique Figure 2, les résultats de la question précédente : points de passage et tangentes connus de la réponse du modèle.

Pseudo-période : $T_a=\dfrac{2\pi}{\omega_a}=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}\approx 0,28$ s

> Les données permettent de positionner les points de tangentes horizontales aux instants suivants : 0,25 s (instant de l'échelon), Ta/2 et Ta pour les dépassements. Il est aussi possible de placer le point d'entrée dans le tube à 5%.



Q6 : En comparant la réponse du modèle (variations finales, dépassements, temps de réponse) au résultat expérimental, déterminer si le modèle peut être considéré valide.

Sur la réponse expérimentale, le premier dépassement correspond à $\omega(t_1)\approx 102°$. Le modèle donne $\omega(t_1)=90\times(1+0,16)=104,4°$. L'écart est inférieur à 10%.

Le temps de réponse expérimental vaut 0,22 s. L'écart avec le modèle est de 10%.

Le modèle est supposé valide.

Réglage du correcteur

> On a $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_m K_c}{\tau}}$ et $z=\dfrac{1}{2\sqrt{\tau K_m K_c}}$. Lorsque l'on augmente le gain du correcteur, z diminue continument et ω_0 augmente.

Q7 : À partir du modèle, déterminer le gain K_{c1} du correcteur permettant d'obtenir un comportement le plus rapide possible sans dépassement.

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\tau K_m K_c}} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{4\tau K_m K_c} \Rightarrow K_c = \frac{1}{4\tau K_m z^2}.$$

Le temps de réponse le plus faible sans dépassement est obtenu avec $z=1$.

D'où $K_{c1} = \frac{1}{4\tau K_m} \approx \frac{1}{4\times 0{,}038 \times 2{,}9} = 2{,}27$ V/rad.

Q8 : À partir du modèle, déterminer le gain K_{c2} du correcteur permettant d'obtenir un comportement le plus rapide possible avec dépassements autorisés. Déterminer le temps de réponse à 5%.

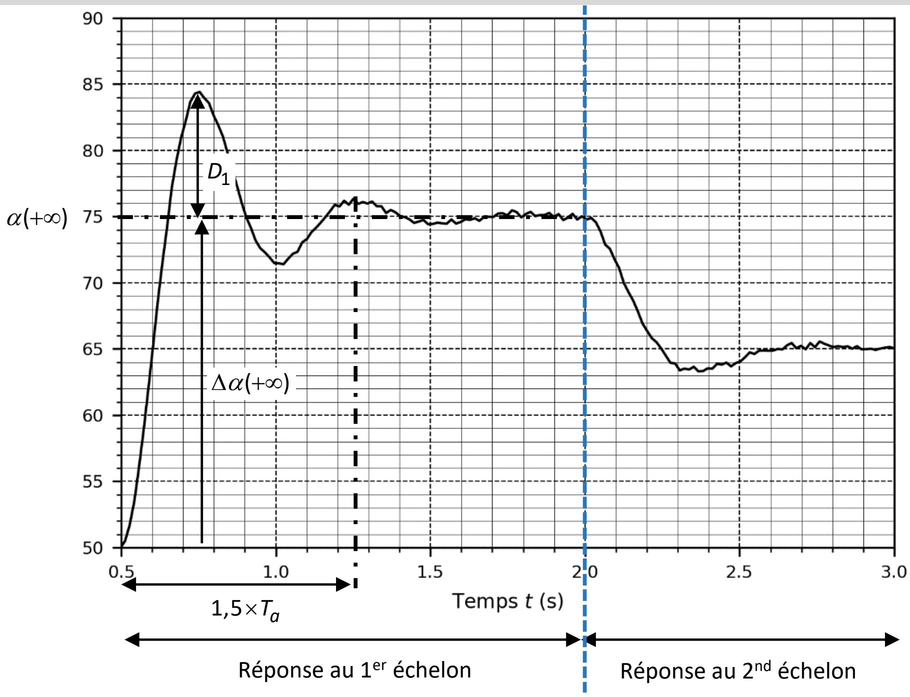
Le temps de réponse le plus faible avec dépassement est obtenu avec $z = 0{,}69$.

D'où $K_{c2} = \frac{1}{4\tau K_m 0{,}69^2} \approx \frac{1}{4\times 0{,}038\times 2{,}9\times 0{,}69^2} = 4{,}8$ V/rad.

Pour cette valeur : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_m K_c}{\tau}} \approx 19{,}1$ rad/s d'où $t_{r5\%} \approx \frac{3}{\omega_0} = 0{,}16$ s.

Exercice 3.4 : **IDENTIFICATION D'UN MODELE DE COMPORTEMENT**

Q1 : Déterminer, par identification et à partir de la réponse au premier échelon, un modèle de comportement en suivi $H_1(p)$.



La réponse est bruitée. Le système répond à deux échelons successifs. On suppose que la réponse est stabilisée avant l'application du deuxième échelon.

La première partie de la courbe, réponse au premier échelon d'amplitude 30°, présente des dépassements. La pente à l'origine pourrait être nulle. Il est donc envisageable de la considérer comme la réponse à un échelon d'un système d'ordre 2 de classe 0.

Attention : l'origine des temps est $t_0 = 0{,}5$ s, et en situation initiale, $\alpha(t_0)$ =50°.

On relève :

- la valeur de la réponse en régime permanent $\alpha(+\infty) = 75$, soit $\Delta\alpha(+\infty) = 75-50 = 25°$
- la valeur du 1er dépassement $D_1 = 84{,}5 - 75 = 9{,}5°$
- l'instant du 3ème dépassement $t_3 = 1{,}25$ s donnant $T_a = \frac{t_3 - t_0}{1{,}5} = 0{,}5$ s

On en déduit :

- **K le gain statique** $K=\dfrac{\Delta\alpha(+\infty)}{\alpha_0}\approx\dfrac{25}{30}=\underline{0{,}83}$
- **z le facteur d'amortissement** *(par le premier dépassement relatif)* :

$$z=\sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2+(\ln D_{1\%})^2}}\quad\text{avec}\quad D_{1\%}=\left|\frac{D_1}{\Delta\alpha(+\infty)}\right|\approx\frac{9{,}5}{25}=0{,}38\ (=38\%)$$

Donc $$z=\sqrt{\frac{(\ln 0{,}38)^2}{\pi^2+(\ln 0{,}38)^2}}=\underline{0{,}29}$$

- **ω_0 la pulsation propre non amortie** *(à partir de la pseudo-période)* :

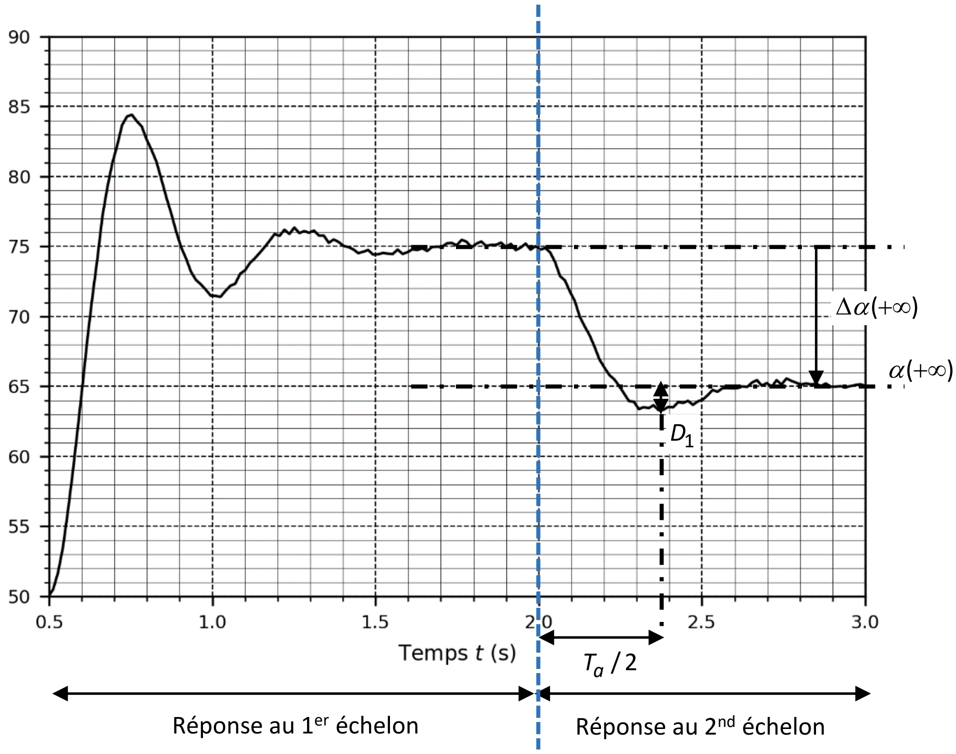
$$T_a=\frac{2\pi}{\omega_a}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}\quad\Rightarrow\quad\omega_0=\frac{2\pi}{T_a\sqrt{1-z^2}}=\frac{2\pi}{0{,}5\sqrt{1-0{,}29^2}}\quad\Rightarrow\quad\omega_0\approx\underline{13\ \text{rad/s}}$$

D'où : $$H_1(p)=\left.\frac{\alpha(p)}{\alpha_c(p)}\right|_{C(p)=0}=\frac{K}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}=\frac{0{,}83}{1+\dfrac{2\times 0{,}29}{13}p+\dfrac{1}{13^2}p^2}\quad\Rightarrow\quad H_1(p)=\frac{0{,}83}{1+0{,}045\,p+0{,}006.p^2}$$

Q2 : Déterminer, par identification et à partir de la réponse au second échelon, un modèle de comportement en régulation $H_2(p)$.

On suppose que le système est stabilisé avant l'application du deuxième échelon d'amplitude 0,7 Nm.

> Attention : l'origine des temps est $t_0=2$ s, et en situation initiale, $\alpha(t_0)$ =75°.



On relève :

- la valeur de la réponse en régime permanent $\alpha(+\infty)=65$ °, soit $\Delta\alpha(+\infty)=65-75=-10°$
- la valeur du 1er dépassement $D_1\approx|63-65|=2°$
- l'instant du 1er dépassement $t_1=2{,}38$ s donnant $T_a=\dfrac{t_1-t_0}{0{,}5}\approx 0{,}76$ s

On en déduit :

- **K le gain statique** $K_2=\dfrac{\Delta\alpha(+\infty)}{C_0}\approx\dfrac{-10}{0{,}7}=\underline{-14{,}3\ °/\text{Nm}}$
- **z le facteur d'amortissement** *(par le premier dépassement relatif)* :

$$z=\sqrt{\frac{(\ln D_{1\%})^2}{\pi^2+(\ln D_{1\%})^2}} \quad \text{avec} \quad D_{1\%}=\left|\frac{D_1}{\Delta\alpha(+\infty)}\right|\approx\frac{2}{10}=0{,}2\,(=20\%). \quad \text{Donc} \quad z\approx\sqrt{\frac{(\ln 0{,}2)^2}{\pi^2+(\ln 0{,}2)^2}}=\underline{0{,}45}|$$

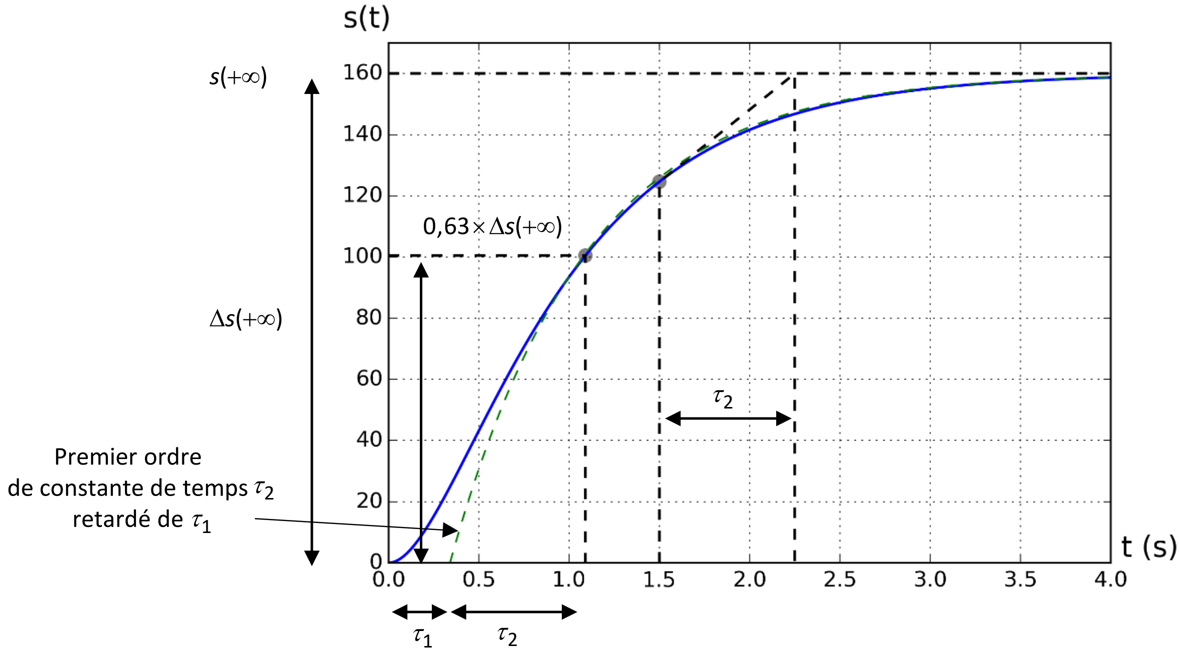
- **ω₀ la pulsation propre non amortie** *(à partir de la pseudo-période)* :

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_a\sqrt{1-z^2}}=\frac{2\pi}{0{,}76\sqrt{1-0{,}45^2}}=\underline{9{,}3\,\text{rad/s}}|$$

D'où : $$H_2(p)=\left.\frac{\alpha(p)}{C(p)}\right|_{\alpha_c(p)=0}=\frac{K_2}{1+\frac{2z_2}{\omega_{02}}p+\frac{p^2}{\omega_{02}^{\;2}}}=\underline{\frac{-14{,}3}{1+\frac{2\times 0{,}45}{9{,}3}p+\frac{1}{9{,}3^2}p^2}}| \quad \Rightarrow \quad H_1(p)=\frac{-14{,}3}{1+0{,}097\,p+0{,}012\,p^2}$$

Exercice 3.5 : **IDENTIFICATION D'UN MODELE NON OSCILLATOIRE**

En vue d'identifier un système, on le soumet à une entrée en échelon $e(t)$ d'amplitude 80. La sortie $s(t)$, mesurée expérimentalement, suit alors les variations définies par le graphique suivant :



Q1 : Donner, à l'aide d'une méthode d'identification, la fonction de transfert $H_2(p)$ du système.

La courbe ne présente pas de dépassement mais possède une tangente de pente nulle à l'origine. Il s'agit donc d'une courbe qui correspond à la réponse à un échelon d'un système d'ordre 2 de classe 0. On suppose que pour *t* suffisamment grand (>0,75 s ici), la réponse correspond à celle d'un premier ordre de constante de temps τ_2 retardée de τ_1.

On relève la valeur de la sortie en régime permanent $s(+\infty)=160=\Delta s(+\infty)$ ici.

On en déduit **K , gain statique,** $\Delta s(+\infty)=K.Ec \quad \Rightarrow \quad K=\frac{160}{80}=\underline{2}|$

On construit le point d'intersection de la tangente à la courbe en *t*=1,5 (valeur prise arbitrairement, mais suffisamment grande) avec l'asymptote horizontale.

On en déduit la **constante de temps** τ_2 : $\tau_2=2{,}25-1{,}5=\underline{0{,}75}|$.

On relève l'instant $t_{63\%}$ correspondant à une réponse de 63% de la variation finale.

On en déduit la **constante de temps** τ_1 : $\tau_1+\tau_2=t_{63\%}$ soit $\tau_1=1{,}1-\tau_2=\underline{0{,}35}|$

On peut donc en déduire l'expression de $H_2(p)$:

Donc $$H_2(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \quad \Rightarrow \quad H_2(p)=\underline{\frac{2}{(1+0{,}35\,p)(1+0{,}75\,p)}}|=\frac{2}{1+1{,}1\,p+0{,}26\,p^2}$$

Q2 : Le système possède-t-il un pôle dominant ?

Le rapport $\tau_2/\tau_1=2{,}1$. On parle de pôle dominant si $\tau_2 >> \tau_1$. Ce n'est pas le cas ici.