PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

TD 3 : MODELISER LE COMPORTEMENT CINEMATIQUE DES TRAINS EPICYCLOÏDAUX

C 03

CORRIGE

Exercice 3.1 : **TRAINS ELEMENTAIRES**

Q1 : Appliquer la démarche et déterminer le rapport de transmission et le composant d'entrée du train 1.

1) Planétaire A : (1) Planétaire B : (0) Satellite : (2) Porte-satellite : (4)

Il est aussi possible d'inverser les planétaires en prenant (0) comme planétaire A et (1) comme planétaire B.

2) $\lambda = \dfrac{\omega_{1/4}}{\omega_{0/4}} = \nearrow \dfrac{+Z_0}{\cancel{Z_2}} \times \dfrac{-\cancel{Z_2}}{Z_1} = -\dfrac{Z_0}{Z_1}$

Pour l'autre choix des planétaires A et B on obtient : $\lambda = \dfrac{\omega_{0/4}}{\omega_{1/4}} = -\dfrac{Z_1}{Z_0}$

3) La référence des vitesses angulaires est l'ensemble (0) : $\lambda = \dfrac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{-\omega_{4/0}}$

Pour l'autre choix des planétaires A et B on obtient : $\lambda = \dfrac{\omega_{0/4}}{\omega_{1/4}} = \dfrac{-\omega_{4/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}$

4) $\lambda = \dfrac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{-\omega_{4/0}} \Leftrightarrow -\lambda = \dfrac{\omega_{1/0}}{\omega_{4/0}} - 1 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\omega_{1/0}}{\omega_{4/0}} = 1 - \lambda = 1 + \dfrac{Z_0}{Z_1}}$

5) Nécessairement $\dfrac{\omega_{1/0}}{\omega_{4/0}} > 1$, le composant étant un réducteur, l'entrée est le planétaire intérieur (1), la sortie le porte-satellite (4) et $\boxed{\dfrac{\omega_e}{\omega_s} = 1 + \dfrac{Z_0}{Z_1}}$

Q2 : Déterminer le rapport de transmission et le composant d'entrée du train 2.

1) Planétaire A : (0) Planétaire B : (3) Satellite : (2) Porte-satellite : (4)

2) $\lambda = \dfrac{\omega_{0/4}}{\omega_{3/4}} = \nearrow \dfrac{+Z_3}{Z_{2b}} \times \dfrac{-Z_{2a}}{Z_0} = -\dfrac{Z_3\, Z_{2a}}{Z_{2b}\, Z_0}$

3) La référence des vitesses angulaires est l'ensemble (0) : $\lambda = \dfrac{-\omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}}$

4) $\lambda = \dfrac{-\omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{4/0}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} - 1 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} = 1 - \dfrac{1}{\lambda}}$

Soit $\boxed{\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} = 1 + \dfrac{Z_{2b}\, Z_0}{Z_3\, Z_{2a}}}$

Il est simple d'inverser la première expression pour pouvoir développer la fraction. Sinon, le calcul est plus long :

$\lambda = \dfrac{-\omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}} \Leftrightarrow \lambda\left(\omega_{3/0} - \omega_{4/0}\right) = -\omega_{4/0} \Leftrightarrow \lambda\omega_{3/0} - \lambda\omega_{4/0} = -\omega_{4/0} \Leftrightarrow \lambda\omega_{3/0} = -\omega_{4/0} + \lambda\omega_{4/0}$

$\Leftrightarrow \lambda\omega_{3/0} = (\lambda - 1)\omega_{4/0} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} = 1 - \dfrac{1}{\lambda}}$

5) Nécessairement $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{4/0}} > 1$, le composant étant un réducteur, l'entrée est le planétaire extérieur (3), la sortie le porte-satellite (4) et $\boxed{\dfrac{\omega_e}{\omega_s} = 1 + \dfrac{Z_{2b}\, Z_0}{Z_3\, Z_{2a}}}$

Exercice 3.2 : **REDUCTEUR A ARBRES COAXIAUX – TRAIN EPICYCLOÏDAL**

Q1 : Compléter les tableaux suivants représentant les différentes configurations possibles de ce train.

Satellite	Porte satellite	Planétaire A	Planétaire B	Raison de base du train	Relation de Willis
2	4	1	3	$\lambda = \frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = \nearrow \frac{Z_3}{Z_{2_b}} \times \frac{-Z_{2_a}}{Z_1}$	$\lambda = \frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = \frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}}$

Pour déterminer le rapport de transmission d'un train épicycloïdal, il faut :

1) calculer la raison de base en écrivant le rapport de transmission entre les planétaires par rapport au porte-satellite puis utiliser la composition des vitesses angulaires pour obtenir la relation de Willis ;

2) simplifier la relation obtenue en tenant compte des particularités du train, de l'entrée et de la sortie.

Pièce d'entrée	Pièce de sortie	Pièce fixe/bâti 0	Relation de Willis simplifiée avec e et s, et en tenant compte de la pièce qui est fixe	Rapport de transmission : $i = \frac{\omega_e}{\omega_s}$
1	4	3	$\lambda = \frac{\omega_e - \omega_s}{-\omega_s}$	$\Rightarrow \lambda = \frac{\omega_e}{-\omega_s} + 1 \Leftrightarrow i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = 1 - \lambda$
1	3	4	$\lambda = \frac{\omega_e}{\omega_s}$	$i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = \lambda$
3	4	1	$\lambda = \frac{-\omega_s}{\omega_e - \omega_s}$	$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega_e - \omega_s}{-\omega_s} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} = \frac{\omega_e}{\omega_s} - 1 \Leftrightarrow i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = 1 - \frac{1}{\lambda}$
4 = 3	1		$\lambda = \frac{\omega_s - \omega_e}{\omega_e - \omega_e}$	Il faut partir de la relation de Willis sans fraction : $\lambda(\omega_{3/0} - \omega_{4/0}) = \omega_{1/0} - \omega_{4/0} \Rightarrow 0 = \omega_s - \omega_e$ soit $i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = 1$
1 = 3	4		$\lambda = \frac{\omega_e - \omega_s}{\omega_e - \omega_s}$	Il faut partir de la relation de Willis sans fraction : $\lambda(\omega_{3/0} - \omega_{4/0}) = \omega_{1/0} - \omega_{4/0}$ $\Rightarrow \lambda(\omega_e - \omega_s) = \omega_e - \omega_s \Rightarrow (\lambda - 1)(\omega_e - \omega_s) = 0 \Rightarrow \omega_e = \omega_s$ si $\lambda \neq 1$ $i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = 1$

Relier deux composants du train revient à « bloquer » le train : rapport de transmission de 1. Il tourne « en bloque »

Q2 : Déterminer le rapport de transmission d'un étage puis du réducteur.

La raison de base s'écrit : $\lambda = \frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = \frac{+Z_3}{\cancel{Z_2}} \times \frac{-\cancel{Z_2}}{Z_1} = \frac{-Z_3}{Z_1}$

$$= \frac{\omega_{1/0} - \omega_{4/0}}{\omega_{3/0} - \omega_{4/0}}$$

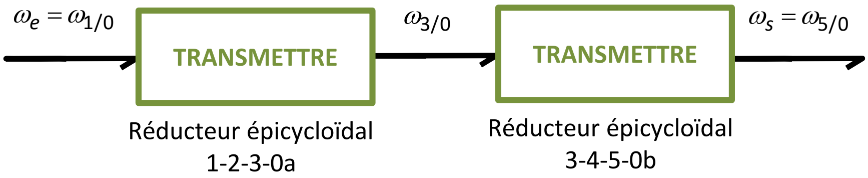
Les spécificités d'un étage sont : $\omega_{ie} = \omega_{1/0}$, $\omega_{is} = \omega_{4/0}$ et $\omega_{i3/0} = 0$, d'où : $\lambda = \frac{\omega_{ie} - \omega_{is}}{-\omega_{is}}$

$$-\lambda\,\omega_{is} = \omega_{ie} - \omega_{is} \Leftrightarrow (1-\lambda)\omega_{is} = \omega_{ie} \Leftrightarrow \frac{\omega_{ie}}{\omega_{is}} = 1 - \lambda = 1 + \frac{Z_3}{Z_1} = 3{,}6 \text{ et } \frac{\omega_{ie}}{\omega_{is}} = 1 - \lambda = 1 + \frac{Z_3}{Z_1} = 3{,}6.$$

Le réducteur comprenant 3 étages identiques : $\boxed{i = \frac{\omega_e}{\omega_s} = (1-\lambda)^3} = 3{,}6^3 = 46{,}656$

Exercice 3.3 : **TREUIL D'ARAIGNEE MECANIQUE**

Q1 : Décomposer la structure du réducteur en 2 transmetteurs élémentaires (nommés étages) et compléter le schéma ci-dessous en précisant les ensembles qui interviennent dans chaque transmetteur. Identifier les composants des trains épicycloïdaux.



Le premier étage est un train épicycloïdal : 2 le satellite, 1 et 0a les planétaires, 3 le porte-satellite.

Le deuxième étage est aussi un train épicycloïdal : 4 le satellite, 3 et 0b les planétaires, 5 le porte-satellite.

Q2 : Déterminer littéralement, en fonction du nombre de dents, le rapport de transmission ω_e / ω_s. On notera λ_1 et λ_2 les raisons de base de chaque étage. Réaliser l'application numérique.

Pour le premier étage : (avec 1 comme planétaire A) – Raison de base : $\lambda_1 = \frac{\omega_{1/3}}{\omega_{0/3}} = \nearrow \frac{Z_{0a}}{Z_2} \times \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{-Z_{0a}}{Z_1}$ – relation de Willis : $\lambda_1 = \frac{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}}{-\omega_{3/0}}$ – avec $\omega_{1/0} = \omega_e$ d'où : $-\lambda_1 = \frac{\omega_e}{\omega_{3/0}} - 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_e}{\omega_{3/0}} = 1 - \lambda_1 = 1 + \frac{Z_{0a}}{Z_1}$	Pour le deuxième étage : (avec 3 comme planétaire A) – Raison de base : $\lambda_2 = \frac{\omega_{3/5}}{\omega_{0/5}} = \nearrow \frac{Z_{0b}}{Z_4} \times \frac{-Z_4}{Z_3} = \frac{-Z_{0b}}{Z_3}$ – relation de Willis : $\lambda_2 = \frac{\omega_{3/0} - \omega_{5/0}}{-\omega_{5/0}}$ – avec $\omega_{5/0} = \omega_s$ d'où : $-\lambda_2 = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{5/0}} - 1 \Leftrightarrow \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{5/0}} = 1 - \lambda_2 = 1 + \frac{Z_{0b}}{Z_3}$

> Pour le choix du planétaire A, il faut **faire le même pour les deux étages**, soit l'intérieur, soit l'extérieur.
> De même, il faut garder le même « ordre » pour les deux étages, soit sortie sur entrée, soit entrée sur sortie, pour que la simplification (produit des rapports de transmission des étages) soit simple.

En multipliant les deux résultats, on obtient : $\frac{\omega_e}{\omega_s} = \frac{\omega_e}{\omega_{3/0}} \frac{\omega_{3/0}}{\omega_s} = (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = \left(1 + \frac{Z_{0a}}{Z_1}\right)\left(1 + \frac{Z_{0b}}{Z_3}\right)$=33,99.

Q3 : Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

La vitesse d'enroulement V maximale de la chaîne s'écrit : $V = \frac{D}{2}\omega_s = \frac{D}{2k}\omega_e$ avec k le rapport de transmission précédemment calculé. D'où : $V = \frac{0{,}15}{2}\frac{1}{33{,}99}3000\frac{2\pi}{60} = 0{,}69$ m/s. Ce qui valide l'exigence de 0,6 m/s.

Exercice 3.4 : **DIFFERENTIEL ET VEHICULE EN VIRAGE**

Q1 : Après avoir identifié les composants du train épicycloïdal, déterminer la raison du train puis la relation de Willis.

Planétaires et porte-satellite ont le même axe de rotation. Le satellite engrène avec les 2 planétaires.

Porte-satellite = (2)   Planétaires = (41) et (42)   Satellite = (3).

Les pignons 41, 3 et 42 ont nécessairement le même pas. De plus les axes de 41 et 42 sont coaxiaux. En conséquence les rayons des cercles primitifs sont identiques et $Z_{41} = Z_{42}$.

La raison du train est : $\lambda = \frac{\omega_{41/2}}{\omega_{42/2}} = -\frac{Z_3}{Z_{41}}\frac{Z_{42}}{Z_3}$. Soit, $\boxed{\lambda = -1}$ pour un différentiel.

> Attention avec le signe. Ce sont des engrenages coniques, mais les ensembles 41 et 42 ont bien des axes parallèles. Si 2 est fixe par rapport à 0, alors les roues 41 et 42 tournent en sens opposés. Ainsi, la raison d'un différentiel vaut -1 ! Les roues tournent en sens inverse par rapport au porte-satellite.

Formule de Willis : $\lambda = -1$

$$= \frac{\omega_{41/2}}{\omega_{42/2}} = \frac{\omega_{41/0} - \omega_{2/0}}{\omega_{42/0} - \omega_{2/0}} \Rightarrow -\omega_{42/0} + \omega_{2/0} = \omega_{41/0} - \omega_{2/0}$$

Soit $\boxed{\omega_{2/0} = \frac{\omega_{41/0} + \omega_{42/0}}{2}}$ relation cinématique d'un différentiel. La vitesse angulaire moyenne des roues est la vitesse d'entrainement du porte-satellite du différentiel.

Q2 : Quelles conditions imposent la vitesse de rotation des roues en conduite « normale » ?

En conduite « normale », ce sont les conditions de non-glissement au niveau des roues qui imposent la répartition des vitesses.

Q3 : Déterminer la relation entre les vitesses lorsque le véhicule est en ligne droite. Que vaut, dans cette condition, $\omega_{3/2}$?

En ligne droite, en supposant que les pneus aient le même diamètre : $\omega_{42/0} = \omega_{41/0} \Rightarrow \omega_{2/0} = \omega_{41/0} \Rightarrow \omega_{3/2} = 0$.

Le différentiel « tourne en bloc ».

Exercice 3.5 : **VARIATEUR DE VITESSE CONTINU DE LA TOYOTA PRIUS**

Q1 : Déterminer la raison et la relation de Willis du train en fonction de ω_m, ω_g et ω_s et la factoriser.

Soit la raison du train $\lambda = \frac{\omega_{3/1}}{\omega_{4/1}} = \nearrow \frac{Z_4}{\cancel{Z_2}} \times \frac{-\cancel{Z_2}}{Z_3} = \frac{-Z_4}{Z_3} = -2{,}6$

$$= \frac{\omega_{3/0} - \omega_{1/0}}{\omega_{4/0} - \omega_{1/0}} = \frac{\omega_g - \omega_m}{\omega_s - \omega_m}$$

D'où : $\lambda\omega_s - \lambda\omega_m = \omega_g - \omega_m \Leftrightarrow \boxed{\lambda\omega_s = \omega_g + (\lambda - 1)\omega_m}$

Q2 : Déterminer le rapport $\frac{\omega_s}{\omega_m}$ en fonction de λ et du rapport $\frac{\omega_g}{\omega_m}$.

On en déduit : $\boxed{\frac{\omega_s}{\omega_m} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{\omega_g}{\omega_m}}$

Soit aussi : $\Rightarrow \frac{\omega_s}{\omega_m} = \frac{3{,}6}{2{,}6} - \frac{1}{2{,}6}\frac{\omega_g}{\omega_m} \approx 1{,}38 - 0{,}38\frac{\omega_g}{\omega_m}$

Q3 : En quoi ce système répond bien à la fonction d'un CVT ? Quel est l'élément de contrôle du rapport de réduction ?

En contrôlant la vitesse de rotation de la génératrice et donc le rapport $\frac{\omega_g}{\omega_m}$, il est possible de faire varier le rapport de transmission $\frac{\omega_s}{\omega_m}$ de façon continue.

L'élément de contrôle est la génératrice.

Q4 : Déterminer le rapport $\frac{\omega_g}{\omega_m}$ lorsque le véhicule est à l'arrêt, moteur thermique allumé (phase de démarrage ou de recharge des batteries à l'arrêt).

A l'arrêt, $\omega_s = 0$, d'où : $\frac{\omega_g}{\omega_m} = 1 - \lambda = 3{,}6$. Si ce rapport n'est pas précisément respecté, la voiture avance, ou recule !

Q5 : Déterminer la vitesse de rotation du rotor du générateur (3).

$\omega_g = \lambda\omega_s - (\lambda - 1)\omega_m = 1270$ tr/mn.