PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

CPGE 1re année

MPSI3-PCSI1

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGENIEUR

Déterminer le comportement géométrique d'un mécanisme

Mécanique générale : mécanismes et cinématique du solide

C 01

2023-2024

https://www.s2i-chateaubriand-joliotcurie.net

Objectifs

Définir un modèle permettant de décrire et de caractériser les positions et mouvements des solides d'un mécanisme

Déterminer les relations entre les coordonnées articulaires et opérationnelles de structures ouvertes et en déduire, des contraintes en position, des conditions sur les paramètres de position

Déterminer les relations d'entrée-sortie en position de structures fermées

Sommaire

I Objectifs 3

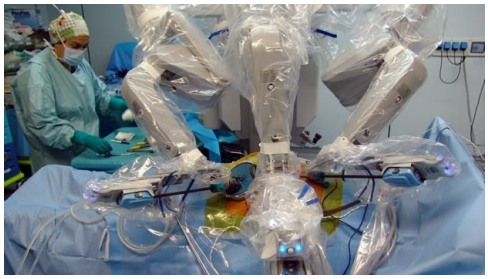
II Modèle cinématique d'un mécanisme 3
II.1 Rappels de cinématique du point : trajectoire et position 3
II.2 Hypothèse de solide indéformable 4
II.3 Définir la position d'un solide indéformable 4
II.4 Mouvement de rotation et liaison pivot 6
II.5 Mouvement de translation et liaison glissière 7

III Modèle géométrique des structures ouvertes - coordonnées opérationnelles et articulaires 9
III.1 Modèle géométrique direct 9
III.2 Imposer une position ou une contrainte de position 9

IV Modèle géométrique de structures fermées : loi entrée-sortie cinématique en position d'un transmetteur 10
IV.1 Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur 10
IV.2 Déterminer la relation d'entrée-sortie en position par fermeture géométrique 11

Simplifications et équivalences usuelles 12

I Objectifs



Un **mécanisme** est un ensemble de **pièces rigides articulées** les unes par rapport aux autres.

L'ensemble peut former une **structure porteuse**, une **structure robotique** ou un sous-ensemble qui **modifie un mouvement** de façon à l'adapter au besoin.

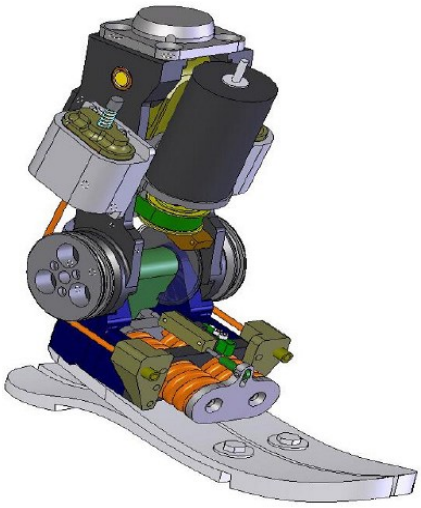
La **position** du mécanisme, ses **mouvements**, sont généralement contrôlés par un ensemble de composants comprenant des **actionneurs** : moteurs ou vérins.

L'objectif de ce cours est de définir des démarches et méthodes permettant de modéliser ces mécanismes et de déterminer les relations entre les paramètres géométriques directement contrôlés par les moteurs (ou les vérins) et les paramètres de position du mécanisme.

II Modèle cinématique d'un mécanisme

L'étude **géométrique** (positions) et **cinématique** (mouvements) d'un mécanisme s'appuie sur un **modèle de comportement cinématique** de celui-ci, dit **modèle cinématique**.

Ce modèle est représenté par un **schéma cinématique** ou un **graphe des liaisons**.



Prothèse transtibiale

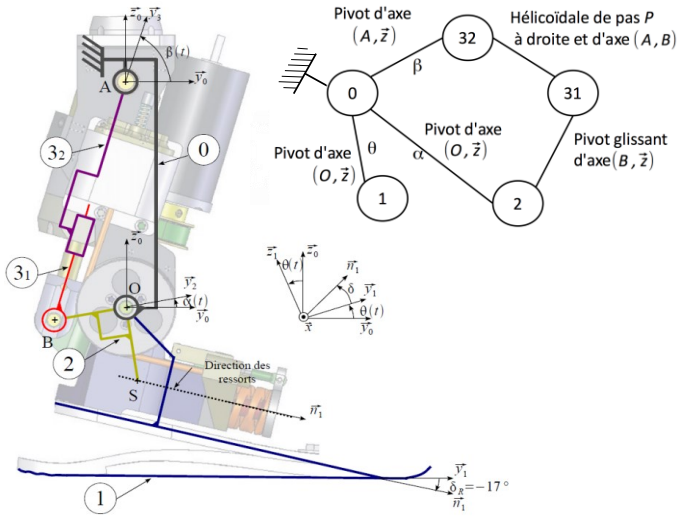


schéma cinématique (2D) et graphe des liaisons

Un **modèle cinématique** est constitué :

- d'**ensembles indéformables** (ensemble = pièce ou ensemble de pièces solidaires) ;
- de **liaisons** qui spécifient **les mouvements possibles** et les **mouvements bloqués**, d'un ensemble par rapport à un autre.

Il définit aussi des **vecteurs unitaires**, des **bases** et des **paramètres de position**.

II.1 Rappels de cinématique du point : trajectoire et position

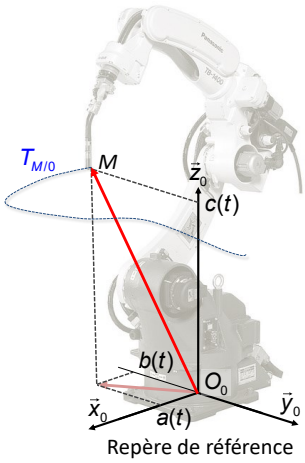
La **trajectoire** d'un **point** dans un **référentiel** est le **lieu des positions successives occupées par ce point** au cours du temps **dans le repère du référentiel**.

La trajectoire peut être :

- **rectiligne**, si la trajectoire est un segment de droite,
- **circulaire**, si la trajectoire est un arc de cercle,
- **quelconque**, si la trajectoire est une courbe quelconque.

Notation : la trajectoire d'un point M par rapport à un référentiel 0 est notée $T_{M/0}$.

Un **vecteur position** du point M dans le repère de référence $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est un vecteur $\overrightarrow{QM}$ avec Q un **point fixe du repère de référence**, en général l'origine.



Repère de référence

Pour alléger les notations dans la suite, on n'écrira pas systématiquement la variable t.

Exemple : en coordonnées cartésiennes, à la date t :

$\overrightarrow{O_0M}(t) = a(t)\,\vec{x}_0 + b(t)\,\vec{y}_0 + c(t)\,\vec{z}_0$

La courbe définie correspond à la trajectoire $T_{M/0}$.

II.2 Hypothèse de solide indéformable

Lors de son fonctionnement, les solides qui constituent un système se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent.

Dans la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont négligeables dans les phénomènes étudiés. Les **solides** seront considérés **indéformables**(1).

(1) les solides dont la fonction est de se déformer (ressorts, barres de torsion…) sont naturellement exclus de cette définition.

Un **solide indéformable** (S) est tel que les **distances** entre tous les couples de **points matériels** ne varient pas au cours du temps :

$$\forall t, \forall A,B \in (S), \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = C^{ste}.$$

Cette hypothèse a de nombreuses conséquences pratiques.

II.3 Définir la position d'un solide indéformable

Repère lié à un solide indéformable

La solution pour repérer la position d'un solide indéformable par rapport à un autre est d'**associer** à chaque solide étudié un repère, dit **repère lié**.

Un **repère lié au solide indéformable** (S) est défini par une **origine** et une **base, fixes** dans (S).

Associé à une échelle de temps, ce repère défini un **référentiel**.

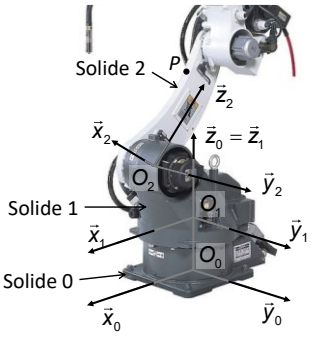
Chaque **point matériel** d'un **solide indéformable** (S) est **fixe** dans un **repère lié** à (S) : ses **coordonnées** dans le repère lié sont **constantes** et donc indépendantes du temps.

La géométrie du solide disparaît. La cinématique s'intéresse aux mouvements de repères et de points !

Exemple : le repère de référence $(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est associé au solide (0), solide de référence du système étudié.

Le buste (1) est associé au repère $(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. Dans ce repère, tous les points constitutifs du solide (1) sont supposés fixes.

Le bras (2) est associé au repère $(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$. Si P est un point matériel de (2), il est fixe dans $(O_2,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$.



Repérer, positionner, un **solide** par rapport à un autre consiste à **positionner un repère lié par rapport à un autre** à l'aide de 6 paramètres de position maximums :

- **3 coordonnées** pour positionner **l'origine dans le repère** de référence ;
- **3 angles** pour positionner **la base dans la base** du repère de référence.

Rotation plane et figure de changement de base

Une base B_2 est en **rotation plane de direction** $\vec{u}$ par rapport à la base B_1, si $\vec{u}$ est un **vecteur commun** aux deux bases.

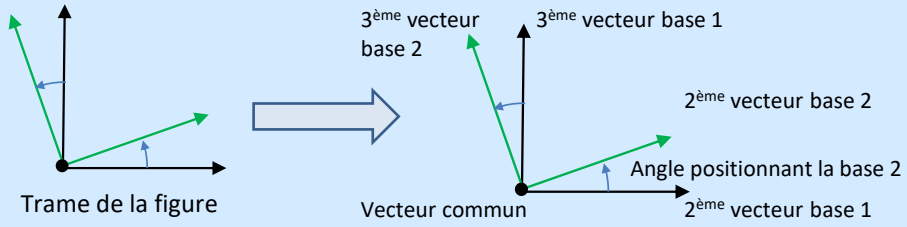
Il **suffit d'un angle** pour positionner une base en rotation plane par rapport à une autre.

Si α est cet angle, on dit que la base B_2 est **tournée d'un angle** α par rapport à la base B_1 suivant la **direction** $\vec{u}$.

Si cet angle est **variable**, B_2 est **en rotation** de direction $\vec{u}$ par rapport à B_1.

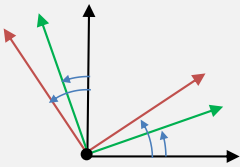
Le paramétrage d'une rotation plane est associé à une **figure de changement de base** :

- **vecteur commun sortant** = 1er vecteur
- 2ème vecteur de la base de référence dans **l'ordre direct** vers la droite
- 3ème vecteur de la base de référence dans **l'ordre direct** vers le haut
- 2nd base tournée d'un **angle positif** et **inférieur à 20°** (1).



(1) permet d'obtenir cos >> sin.

Si plusieurs bases ont un même vecteur commun, il faut les regrouper.



Positionner une base par rapport à une base

Positionner une base dans un repère de référence, c'est positionner une base **par rapport à la base de référence** à l'aide **d'angles**.

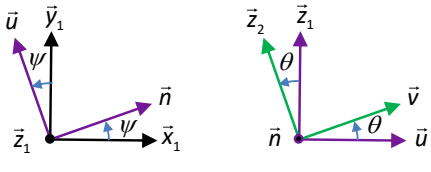
Il faut au maximum **3 paramètres angulaires** associés à **3 rotations planes successives**.

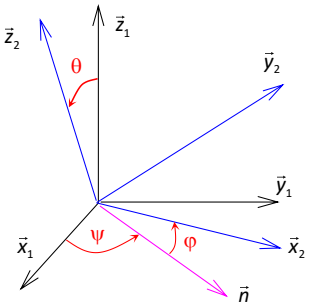
Exemple des angles d'Euler : deux bases intermédiaires sont utilisées.

En partant de la base B_1 :

$B_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1) \Rightarrow B_n(\vec{n},\vec{u},\vec{z}_1) \Rightarrow B_v(\vec{n},\vec{v},\vec{z}_2) \Rightarrow B_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$

Rotations : de $\psi/\vec{z}_1$ de $\theta/\vec{n}$ de $\varphi/\vec{z}_2$





Mouvements élémentaires

Un mouvement élémentaire est obtenu par variation de l'un des paramètres de position.

Puisqu'il faut **6 paramètres indépendants pour positionner un solide** par rapport à un autre, il est possible de définir 6 mouvements élémentaires indépendants en faisant varier chaque paramètre à son tour.

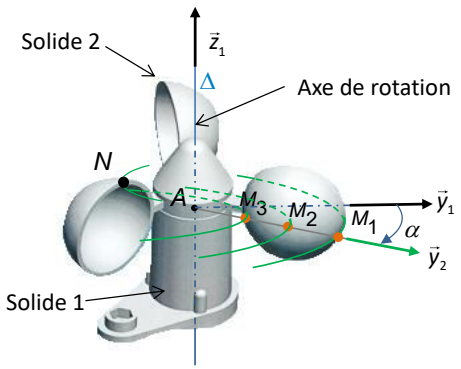
Un **solide** a au maximum **6 degrés de liberté** (**DDL**) par rapport à un autre :

- la modification de la **position** de **l'origine** définit **3 translations** ;
- la modification de **l'orientation** de la **base** définit **3 rotations**(2).

(2) Un degré de liberté peut aussi être une combinaison de translation et de rotation. Exemple : le système vis-écrou impose une mobilité combinant une rotation avec une translation entre la vis et l'écrou.

II.4 Mouvement de rotation et liaison pivot

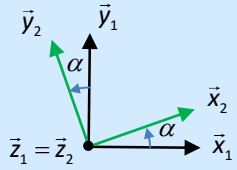
Un solide (2) est en **rotation** par rapport à un solide (1) si et seulement si il existe **à chaque instant** un ensemble de points **fixes dans (1) et (2)** formant une **droite**, appelée **axe de rotation** de (2) / (1).



Considérons un solide (2) en **rotation d'axe** $(A,\vec{z}_1)$ par rapport au solide (1), paramétrée par **l'angle** $\alpha(t)=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$.

Conséquences :

- le **point *A*** ainsi que tous les **points de l'axe** $(A,\vec{z}_1)$ sont **fixes** dans (1) **et** (2) ;
- le vecteur $\vec{z}_1$ est un **vecteur commun** aux **bases liées** à (1) et (2) ;
- le paramétrage définit la **figure de changement de base** :



- les **trajectoires** /(1) des points matériels de (2) ou **fixes** dans (2) sont des **cercles concentriques**, centrés sur l'axe de rotation et perpendiculaires à l'axe de rotation;
- la **vitesse angulaire** (vitesse / taux de rotation) est $\omega_{2/1}=\dot{\alpha}(t)=\dfrac{d\alpha}{dt}$ en rad/s [(1)] ;

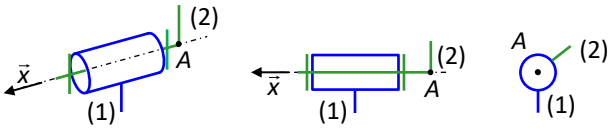
(1) une autre unité usuelle est le tr/min.

Si N est la vitesse angulaire en tr/min :

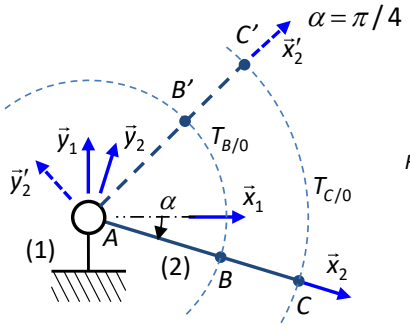
$N=\dfrac{60}{2\pi}\dot{\alpha}\approx 10\,\dot{\alpha}$ tr/mn

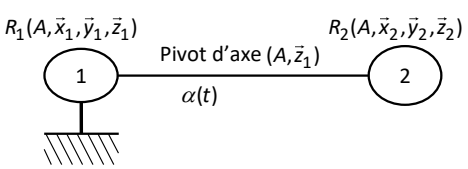
Entre deux solides, un **mouvement de rotation** autour d'un axe $(A,\vec{x})$ est **imposé** par une **liaison pivot d'axe** $(A,\vec{x})$.

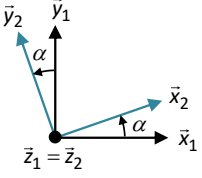
Symboles normalisés :



Application : Mettre en couleur, compléter le graphe des liaisons et la figure de changement de base. Déterminer la valeur approximative du paramètre de position dans la configuration donnée. Tracer le mécanisme en pointillé pour $\alpha=\pi/4$. Tracer les trajectoires de B et C par rapport à 0.







$\alpha \approx -15°$

II.5 Mouvement de translation et liaison glissière

Un solide (2) est en **translation** par rapport à un solide (1) si et seulement si tout segment reliant deux points fixes de (2) reste **parallèle** à lui-même dans (1).

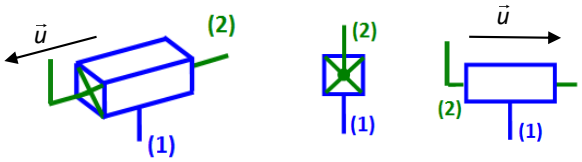
Si (2) est en translation par rapport à (1) :

- les **trajectoires** des points matériels ou **fixes** de (2)/(1) sont toutes **identiques** et **parallèles** ;
- les **bases liées** peuvent être **identiques**.

On distingue les **translations à trajectoire** rectiligne, circulaire et quelconque.

Entre deux solides, un **mouvement de translation** de direction $\vec{u}$ est **imposé** par une **liaison glissière de direction** $\vec{u}$.

Symboles normalisés :



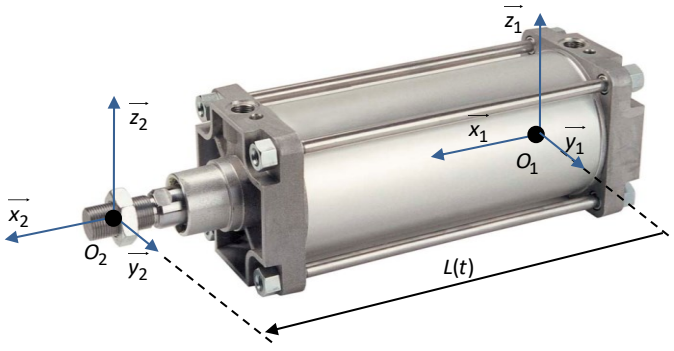
Symbole 3D Symboles 2D

Mouvement de translation à trajectoire rectiligne

Soit un solide (2) en **translation à trajectoire rectiligne de direction** $\vec{x}_1$ par rapport au solide (1), paramétrée par la **longueur** $L(t)=\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\vec{x}_1$.

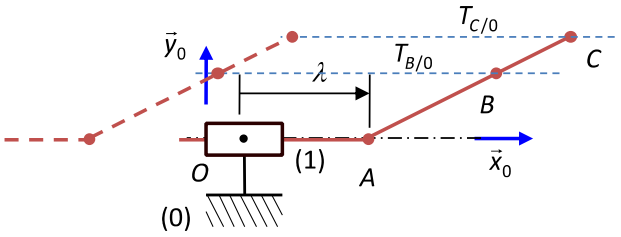
Conséquences :

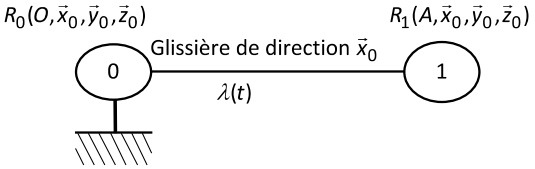
- $\overrightarrow{O_1O_2}$ est un vecteur position de O_2 dans R_1
- les **trajectoires** des points fixes de (2) dans (1) sont des **segments de droites parallèles à la direction** $\vec{x}_1$
- la **vitesse de translation** est $\dot{L}(t)=\dfrac{dL}{dt}$ en **m/s**.



Vérin pneumatique

Application : Mettre en couleur. Compléter le graphe des liaisons. Déterminer la valeur approximative du paramètre de position dans la configuration donnée. Tracer le mécanisme en pointillé pour λ = -3 cm.





λ ≈ 1,7 cm

Mouvement de translation à trajectoire circulaire

(1) Il peut aussi être imposé par le pilotage adéquat des actionneurs

Un mouvement de **translation à trajectoire circulaire** est soit imposé par la commande, soit obtenu par l'intermédiaire d'un mécanisme de **type parallélogrammes déformable**.

Exemple : essuie-glace d'autobus

Le système ci-dessous modélise un essuie-glace d'autobus. Le balai est lié à l'ensemble (3).

Le balai est relié au châssis (1) par l'intermédiaire de deux pièces formant un parallélogramme déformable ABCD.

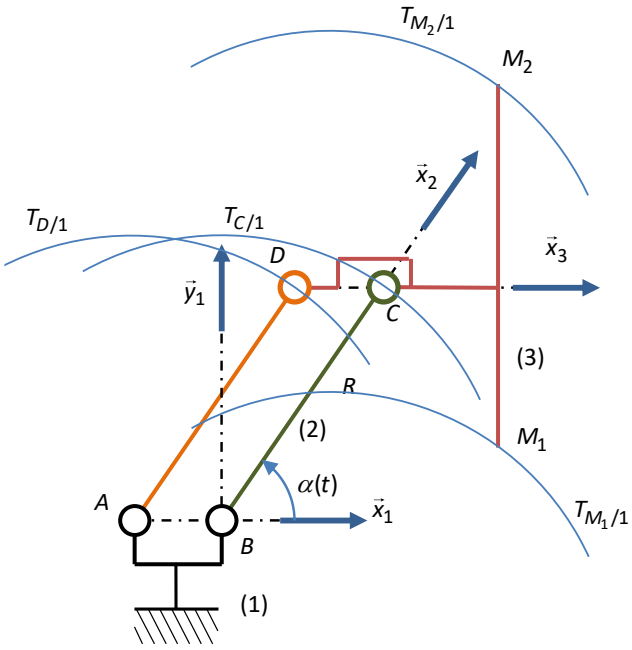
On montre ainsi que DC reste parallèle à AB, d'où : $\vec{x}_3 = \vec{x}_1$.

Un repère lié à (3) est donc $R_3(C,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$: (3) a bien un mouvement de translation par rapport à (1).

De plus, *C* est un point fixe de (2) en mouvement de rotation d'axe $(B,\vec{z}_1)$ par rapport à (1). $T_{C/1}$ est donc un cercle (ou segment de cercle) centré sur *B*, de longueur $R = BC$.

Pour un mouvement de translation, toutes les trajectoires sont identiques : des cercles de même rayon *R* mais de centres distincts.

La position (et donc le mouvement) de 3/1 est défini par la position de l'origine *C* du repère lié et, donc, par l'angle $\alpha(t) = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$. On remarque que $\vec{x}_2$ et $\vec{y}_2$ ne sont liés ni à (1) ni à (3).



Ce mouvement classique est source de difficulté car il s'agit d'une translation paramétrée par un angle. Méfiance !

Soit un solide (3) en **translation à trajectoire circulaire de rayon *BC*** (avec *R*=*BC*) par rapport au solide (1), paramétrée par l'angle $\alpha(t) = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$.

Conséquences :

- la **trajectoire** de *C*, point fixe de (3), dans (1) est un cercle centré sur *B*
- les trajectoires des points fixes de (3) dans (1) sont toutes des cercles de rayon *R*
- les **bases liées** à (3) et (1) peuvent être **identiques**
- la **vitesse de translation** est $R\,\dot{\alpha}(t)$ en **m/s**.

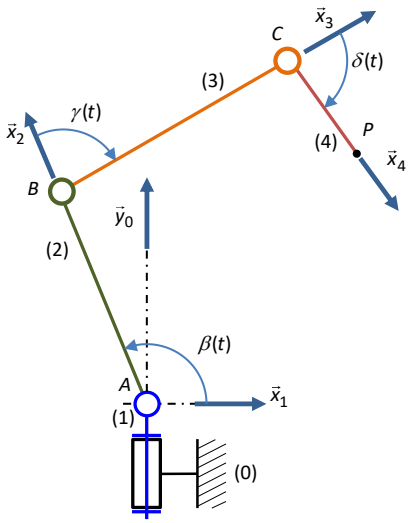
III Modèle géométrique des structures ouvertes - coordonnées opérationnelles et articulaires

III.1 Modèle géométrique direct

Considérons le modèle cinématique d'un **robot série** à 4 degrés de liberté tel qu'il est défini ci-contre.

L'ensemble de référence est noté (0), associé au repère $R_0(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

L'outil est l'ensemble (4). Seule la position du point *P* est supposée fonctionnelle.



Les **coordonnées opérationnelles** sont les coordonnées de l'outil (effecteur du mécanisme) dans le repère de référence.

Les **coordonnées articulaires** sont les paramètres de position des liaisons du mécanisme, paramètres associés aux actionneurs (moteurs et vérins).

Dans l'exemple, les coordonnées opérationnelles sont celles du point *P* dans R_0, notées (X,Y,Z) en posant $\overrightarrow{AP} = X\,\vec{x}_0 + Y\,\vec{y}_0 + Z\,\vec{z}_0$. Les coordonnées articulaires sont le n-uplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.

En **robotique**, le **modèle géométrique direct** est l'ensemble des équations permettant de calculer les **coordonnées opérationnelles** (position de l'effecteur) en fonction des **coordonnées articulaires**.

Le vecteur position de l'effecteur dans le repère de référence s'écrit aussi :

$\overrightarrow{AP} = a\,\vec{x}_1 + b\,\vec{x}_2 + c\,\vec{x}_3 = \vec{f}_{articulaire}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, avec *a*, *b* et *c* les dimensions des segments *AB*, *BC* et *CP*.

Le modèle géométrique direct s'obtient en projetant l'équation $X\,\vec{x}_0 + Y\,\vec{y}_0 + Z\,\vec{z}_0 = \vec{f}_{articulaire}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ dans la base de référence. On obtient ainsi 3 équations scalaires :

$$\begin{cases} X = \vec{f}_{articulaire}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot\vec{x}_0 \\ Y = \vec{f}_{articulaire}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot\vec{y}_0 \\ Z = \vec{f}_{articulaire}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\cdot\vec{z}_0 \end{cases}$$

Le **modèle géométrique inverse** permet de calculer les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées opérationnelles.

III.2 Imposer une position ou une contrainte de position

Pour **imposer une position** à un effecteur, il est nécessaire de déterminer le **modèle géométrique direct puis de l'inverser** numériquement ou en calculant le modèle géométrique inverse.

Une **contrainte de position limite les mouvements** possibles de l'effecteur. Elle s'exprime par une ou plusieurs **expressions vectorielles**.

Exemples :

- contrainte de **distance** → contrainte sur une **norme**
- contrainte **d'appartenance** à une **droite** → contrainte sur 2 coordonnées
- contraintes d'appartenance à un **plan** → contrainte sur une **coordonnée**
- contrainte de **trajectoire** → contrainte sur les **coordonnées**.

Exemples de contraintes :

1) le point *P* doit rester à une distance inférieure à *d* de son origine bâti *A*, soit à l'intérieur d'une sphère de rayon *d* : $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \le d$.
2) Le point *P* doit rester à une hauteur *h* du « sol », soit sur un plan parallèle à $(\vec{x}_0,\vec{z}_0)$: $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{y}_0 = h$
3) Le point *P* doit se situer sur une droite verticale passant par le point *D*(*L*,0,0) :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{x}_0 = L \quad \overrightarrow{AP}\cdot\vec{z}_0 = 0$$

IV Modèle géométrique de structures fermées : loi entrée-sortie cinématique en position d'un transmetteur

Un mécanisme peut former une structure porteuse, mais aussi, dans bien des cas, servir à **transformer le mouvement** et les **efforts** pour les adapter au besoin. On parle alors de **transmetteur**.

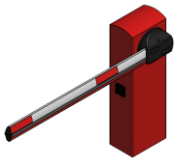
Ces transmetteurs peuvent ainsi transformer un mouvement continu de rotation, en mouvement alternatif de rotation ou de translation.

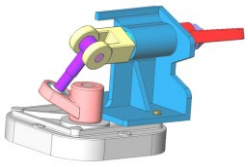
L'objectif est de déterminer, par exploitation d'un modèle cinématique, la relation mathématique caractérisant le comportement cinématique de ces **mécanismes en chaîne fermé** utilisés comme transmetteurs ; relation appelée **loi entrée-sortie cinématique** en **position**.

Dans un mécanisme en chaîne fermée utilisé comme transmetteur, il n'y a qu'une seule liaison « motorisée ». C'est la structure bouclée du mécanisme qui fait que la mise en mouvement de cette liaison entraîne celle de tout le mécanisme. Cette **structure bouclée** du mécanisme se retrouve dans le graphe des liaisons sous la forme **d'une chaîne fermée**.

Exemple : mécanisme de transformation de mouvement d'une barrière.

Le solide 1 est entraîné en rotation par un motoréducteur électrique. Animé d'un mouvement de rotation continu (à vitesse constante) par rapport au bâti 0, il permet la mise en rotation alternative du solide 4 sur lequel est fixé la lisse de la barrière.





CAO

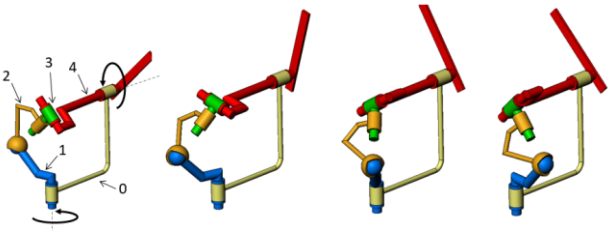
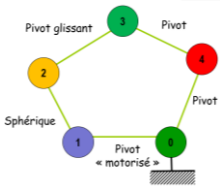


Schéma-cinématique dans différentes positions



Graphe des liaisons

Il existe de très nombreuses typologies de mécanisme de transformation de mouvement. Nous nous intéressons ici aux **mécanismes plans à barres**.

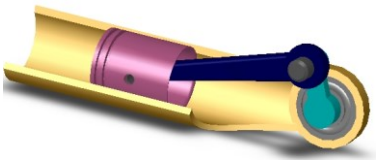
IV.1 Loi entrée-sortie cinématique d'un transmetteur

Dans un mécanisme transmetteur, on peut distinguer un **paramètre** de position **d'entrée** et un **paramètre** de position de **sortie**.

> La loi **d'entrée-sortie cinématique en position** est la **relation mathématique** reliant les paramètres de position **d'entrée** et de **sortie**.

Exemple : système bille-manivelle

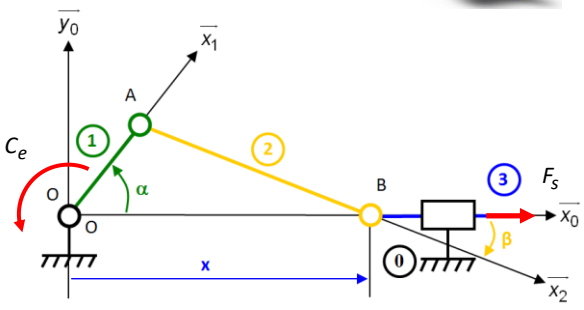
Ce mécanisme correspond à celui que l'on retrouve dans un moteur thermique, par exemple.



Le modèle cinématique comprend 4 liaisons, 4 DDL de liaison associés à 4 paramètres de position.

Les paramètres d'entrée et de sortie sont ceux associés à la liaison pivot L_{01} et à la liaison glissière L_{30}.

Pour un compresseur, l'entrée est l'angle α, pour un moteur à combustion interne, l'entrée est la distance x.



IV.2 Déterminer la relation d'entrée-sortie en position par fermeture géométrique

Démarche pour obtenir une loi **entrée-sortie en position** :

- écrire la **relation vectorielle de fermeture géométrique** de la chaîne de solides ; relation de Chasles entre les **points caractéristiques des liaisons** en parcourant la chaîne fermée :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$$

- **projeter l'équation de fermeture** dans la base de référence des angles pour faire apparaître les paramètres d'E/S.

  On obtient 3 équations scalaires pour un modèle spatial ;

- **éliminer les paramètres intermédiaires** en combinant les équations obtenues ;

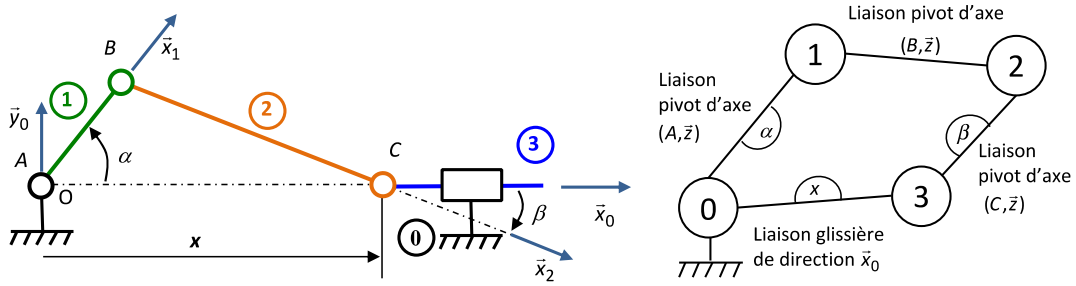
OU

- écrire la **norme au carré** de l'un des termes de la fermeture géométrique

$$\left\|\overrightarrow{AE}\right\|^2=(\overrightarrow{AB}+\cdots+\overrightarrow{DE})^2=\overrightarrow{AB}^2+\cdots\overrightarrow{DE}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\cdots+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}$$

Application : système bielle-manivelle. Déterminer la relation E/S en position.

$AB=e$ et $BC=L$



A1 - Écrire la fermeture géométrique

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

Soit : $x\,\vec{x}_0=e\,\vec{x}_1+L\,\vec{x}_2$

A2 - Projeter l'équation de fermeture et identifier le paramètre à éliminer.

$/\vec{x}_0$: $x=e\cos\alpha+L\cos\beta$

$/\vec{y}_0$: $0=e\sin\alpha+L\sin\beta$

Le paramètre à éliminer est l'angle β.

A3 - Déterminer la relation E/S en position en supposant x l'entrée.

Des équations on obtient : $\begin{aligned}L\cos\beta&=x-e\cos\alpha\\L\sin\beta&=-e\sin\alpha\end{aligned}$

En sommant le carré des équations on obtient : $L^2\cos^2\beta+L^2\sin^2\beta=(x-e\cos)^2+e^2\sin^2\alpha$

$$\Rightarrow L^2=(x-e\cos\alpha)^2+e^2\sin^2\alpha\Rightarrow L^2=x^2+e^2-2ex\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{L^2-x^2-e^2}{-2ex}$$

Expression reliant α à x et aux paramètres géométriques.

$\cos\alpha$ devant être compris entre -1 et 1, il existe des conditions entre α , L, x et e pour que la solution existe.

Pour un x donné, il existe une infinité de solution pour α, ou aucune. En particulier, si α est solution, -α aussi.

Simplifications et équivalences usuelles

Pour éliminer un angle

Pour **éliminer un angle** β présent dans 2 équations en cosinus et sinus [1] :

Si $\begin{matrix}(i) & R\cos(\beta)=f(\alpha,\lambda)\\ (ii) & R\sin(\beta)=g(\alpha,\lambda)\end{matrix}$, $(i)^2+(ii)^2$ donne $R^2=f^2(\alpha,\lambda)+g^2(\alpha,\lambda)$.

(1) avec :

$$(R\cos(\beta))^2+(R\sin(\beta))^2=R^2$$

Pour éliminer une distance

Pour **éliminer une distance en facteur** d'un cosinus et sinus, on cherche à utiliser le résultat suivant[2] :

Si $\begin{matrix}(i) & \lambda\sin(\beta)=f(\alpha)\\ (ii) & \lambda\cos(\beta)=g(\alpha)\end{matrix}$, $\dfrac{(i)}{(ii)}$ donne $\tan(\beta)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$.

(2) avec toutes les précautions nécessaires sur les valeurs de $g(\alpha)$.

Pour déterminer un angle à partir d'une fonction trigonométrique

À partir du domaine de définition des fonctions inverses et des propriétés des fonctions trigonométriques, on obtient les résultats suivants :

$n\in\mathbb{N}$, $|A|\le 1$:

$$\sin\alpha=A\Leftrightarrow\alpha=(-1)^n\arcsin(A)+n\pi$$
$$\cos\alpha=A\Leftrightarrow\alpha=\pm\arccos(A)\,[2\pi]$$
$$\tan\alpha=B\Leftrightarrow\alpha=\arctan(B)\,[\pi]$$

Pour déterminer un angle à partir d'une somme de sinus et cosinus

Il est parfois nécessaire de **simplifier une somme** de sinus et cosinus ainsi :

$$A\cos(\alpha)+B\sin(\alpha)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\varphi)\ \text{ avec }\ \varphi=\arctan\left(\frac{B}{A}\right)[\pi]$$ [3]

(3) avec toutes les précautions nécessaires sur la valeur de A.

En effet : $A\cos(\alpha)+B\sin(\alpha)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\alpha+\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\alpha\right)$.

En posant $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, on a $(\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2=1$ et l'angle φ vérifie $\tan\varphi=\dfrac{B}{A}$, soit $\varphi=\arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)[\pi]$. D'où : $A\cos(\alpha)+B\sin(\alpha)=\sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha\right)=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\varphi)$.

Autre possibilité, on pose :

$$\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

et $\cos\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Dans ce cas : $\tan\varphi=\dfrac{A}{B}$

et $\sin(\alpha+\varphi)=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Si $A\cos(\alpha)+B\sin(\alpha)=C$ et si $\left|\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\le 1$,

alors $\cos(\alpha-\varphi)=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ avec $\varphi=\arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)[\pi]$

et $$\alpha=\pm\arccos\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)[2\pi]+\arctan\left(\frac{B}{A}\right)[\pi].$$

Les « bonnes » solutions sont déterminées à partir de la géométrie du système.