PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

TD 2 : MODELISATION, SYNTHESE ET PERFORMANCES EN POURSUITE ET REGULATION DES SYSTEMES ASSERVIS

C 05

CORRIGE

Exercice 2.1 : SYSTEME RAMSES

Q1 : Compléter le schéma-bloc (potentiomètre, limnimètre, correcteur et réservoir).

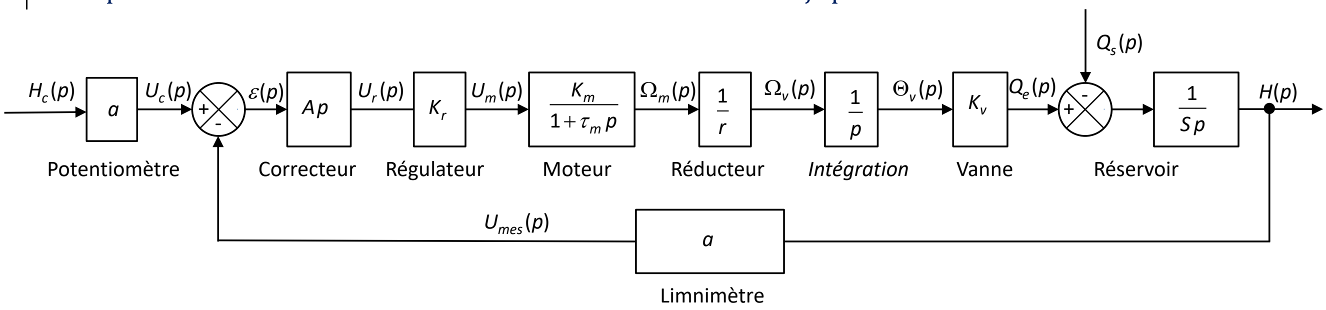
<u>Potentiomètre</u> : gain a, d'où $U_c(p) = a\,H_c(p)$.

<u>Limnimètre</u> : pour toute valeur de la consigne, l'image de l'erreur $\varepsilon(p) = aH_c(p) - K_{cap}H(p)$ doit être nulle lorsque l'erreur est nulle, d'où $K_{cap} = a$ et $U_{mes}(p) = a\,H(p)$.

<u>Correcteur</u> : $u_r(t) = A\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$, d'où $U_r(p) = A\,p\,\varepsilon(p)$.

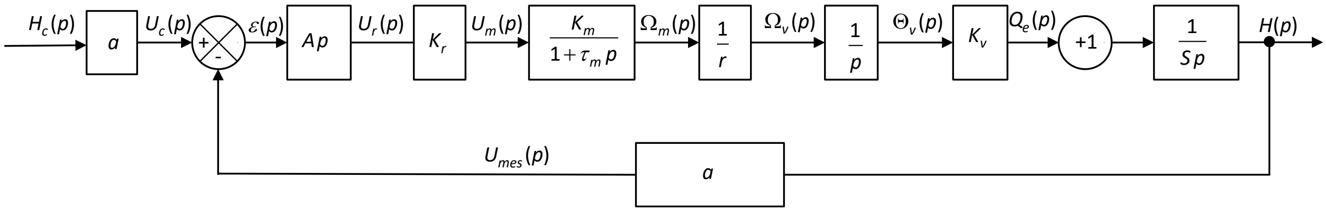
<u>Réservoir</u> : $q_e(t) - q_s(t) = S\dfrac{dh(t)}{dt}$, d'où : $Q_e(p) - Q_s(p) = S\,p\,H(p) \Rightarrow H(p) = \dfrac{1}{S\,p}\left(Q_e(p) - Q_s(p)\right)$

> On exprime la sortie en fonction des entrées. Le soustracteur est déjà placé sur le schéma.



Q2 : Déterminer la fonction de transfert $F_1(p) = \left.\dfrac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0}$. Le modèle est-il précis en poursuite ?

Pour $Q_s(p) = 0$, le schéma devient :



> Le soustracteur de la boucle fermée correspond à la situation usuelle.

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = a\frac{A\cancel{p}\,K_r\dfrac{K_m}{(1+\tau_m\,p)}\cdot\dfrac{1}{r\,\cancel{p}}K_v\dfrac{1}{Sp}}{1+aA\cancel{p}\,K_r\dfrac{K_m}{(1+\tau_m\,p)}\cdot\dfrac{1}{r\,\cancel{p}}K_v\dfrac{1}{Sp}} \quad \text{(on pose puis on simplifie)}$$

$$= \frac{a\,AK_r\,K_m\,K_v}{(1+\tau_m\,p)r\,S\,p + a\,AK_r\,K_m\,K_v} = \frac{a\,AK_r\,K_m\,K_v}{r\,S\,p + \tau_m\,r\,S\,p^2 + a\,AK_r\,K_m\,K_v} \quad \text{(multiplier par le déno. du déno } (1+\tau_m p)rSp\text{, devélopper)}$$

$$= \frac{\cancel{aAK_rK_mK_v}}{\cancel{aAK_rK_mK_v}}\;\frac{1}{1+\dfrac{r\,S}{a\,AK_r\,K_m\,K_v}p+\dfrac{\tau_m\,r\,S}{a\,AK_r\,K_m\,K_v}p^2} \quad \text{(mettre sous forme canonique)}$$

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = \frac{1}{1+\dfrac{r\,S}{a\,AK_r\,K_m\,K_v}p+\dfrac{\tau_m\,r\,S}{a\,AK_r\,K_m\,K_v}p^2}\ .$$

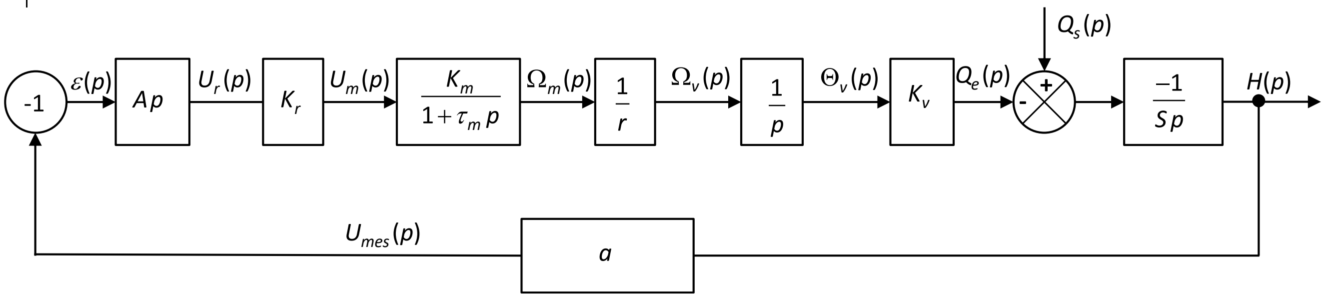
Ainsi si $Q_s(p) = 0$ alors $H(p) = F_1(p)\,H_c(p)$

Les gains étant tous positifs, le modèle d'ordre 2 de classe 0 est stable. De gain statique unitaire, l'erreur statique est nulle.

> Résultat que l'on retrouve par le théorème de la valeur finale, mais qu'il est bon aussi de connaître :
>
> Soit h_0 l'amplitude de l'échelon de consigne, $\Delta h(+\infty) = \lim\limits_{p\to 0} \cancel{p} F_1(p)\dfrac{h_0}{\cancel{p}} = h_0 \lim\limits_{p\to 0} F_1(p) = h_0$.
>
> D'où $e_{pour}(+\infty) = h_0 - \Delta h(+\infty) = 0$.

Q3 : Déterminer la fonction de transfert $F_2(p) = \left.\dfrac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0}$. Le modèle est-il sensible aux perturbations de débit sortant ? Si oui, déterminer l'erreur statique en régulation.

> Pour $Q_s(p)=0$, et après avoir modifié les signes du soustracteur pour obtenir une boucle fermée usuelle, le schéma devient :



> La chaîne directe est entre le comparateur et le point de prélèvement. Elle ne comprend que la fonction $\dfrac{-1}{Sp}$.

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{\dfrac{-1}{Sp}}{1+a(-1)A\cancel{p}K_r\dfrac{K_m}{(1+\tau_m p)}\dfrac{1}{r\cancel{p}}K_v\dfrac{-1}{Sp}}$$

$$= \frac{-(1+\tau_m p)r}{(1+\tau_m p)rSp + aAK_rK_mK_v} = -\frac{r+\tau_m r p}{rSp+\tau_m rSp^2 + aAK_rK_mK_v}$$

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-r}{aAK_rK_mK_v}\cdot\frac{1+\tau_m p}{1+\dfrac{rS}{aAK_rK_mK_v}p+\dfrac{\tau_m rS}{aAK_rK_mK_v}p^2}$$

Ainsi si $H_c(p)=0$ alors $H(p) = F_2(p)\,Q_s(p)$

Les gains étant tous positifs, le modèle d'ordre 2, de classe 0 est stable. Pour une perturbation en échelon, la variation finale de la hauteur d'eau (la réponse) n'est pas nulle. Le modèle est **sensible aux perturbations** de débit sortant.

Si q_0 est l'amplitude de l'échelon de débit $q_s(t)$, $e_{reg}(+\infty) = -\Delta h(+\infty) = \dfrac{r}{aAK_rK_mK_v}q_0$

Q4 : En déduire l'expression de $H(p)$ en fonction de $F_1(p)$, $F_2(p)$, $H_c(p)$ et $Q_s(p)$.

Le théorème de superposition donne : $H(p) = F_1(p)\,H_c(p) + F_2(p)\,Q_s(p)$

Q5 : Lorsque la hauteur d'eau dans le réservoir est stabilisée, quelle est sa valeur en fonction des paramètres du système, de h_0 et de q_0 ? Conclure.

Les deux fonctions de transfert sont de classe 0 et les deux entrées (consigne et perturbation) sont des échelons.

Si on note K_1 le gain statique de $F_1(p)$ et K_2 celui de $F_2(p)$, alors :

$$\Delta h(+\infty) = K_1 h_0 + K_2 q_0 = \boxed{h_0 - \frac{r}{aAK_rK_mK_v}q_0} \; .$$

Pour que le système asservi soit précis, il faut que la sortie soit égale à la consigne : $h(+\infty) = h_0$.

C'est à dire qu'il faut annuler l'effet de la perturbation. Il faut donc prendre $aAK_rK_mK_v / r$ le plus grand possible.

Mais cet effet ne sera jamais nul. Une autre possibilité consisterait à choisir un autre correcteur.

Démonstration par le théorème de la valeur finale :

Dans le domaine de Laplace, la consigne s'écrit $H_c(p) = \dfrac{h_0}{p}$ et la perturbation $Q_s(p) = \dfrac{q_0}{p}$.

La réponse à ces entrées est : $H(p) = F_1(p)\dfrac{h_0}{p} + F_2(p)\dfrac{q_0}{p}$

La hauteur d'eau recherchée est la valeur finale de cette réponse. On l'obtient par le théorème de la valeur finale :

$$\Delta h(+\infty) = \lim_{p\to 0}\left(pH(p)\right) = \lim_{p\to 0} p\left(F_1(p)\frac{h_0}{p} + F_2(p)\frac{q_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(F_1(p)\,h_0 + F_2(p)\,q_0\right) = h_0 + \frac{-r}{a A K_r K_m K_v} q_0$$

Exercice 2.2 : **SUSPENSION DE CAMION**

Q1 : Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \left.\dfrac{Y(p)}{Y_c(p)}\right|_{F_{ext}=0}$

Le système comprend deux boucles l'une dans l'autre.

Boucle intérieure : $$\left.\frac{Y(p)}{Q(p)}\right|_{F_{ext}=0} = \frac{\dfrac{S}{K_2 p}\dfrac{1}{(mp^2+fp)}}{1 + S\cancel{p}\dfrac{S}{K_2\cancel{p}}\dfrac{1}{(mp^2+fp)}} = \frac{\dfrac{S}{p}}{K_2(mp^2+fp)+S^2} = \frac{S}{K_2(mp^2+fp)p + S^2 p}$$

Modèle complet : $$H(p) = \left.\frac{Y(p)}{Y_c(p)}\right|_{F_{ext}=0} = \frac{\dfrac{K_1 S}{K_2(mp^2+fp)p+S^2p}}{1+\dfrac{K_1S}{K_2(mp^2+fp)p+S^2p}} = \frac{K_1 S}{K_2(mp^2+fp)p+S^2p+K_1S} = \frac{K_1S}{K_1S+S^2p+fK_2p^2+K_2mp^3}$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{S}{K_1}p+\dfrac{fK_2}{SK_1}p^2+\dfrac{mK_2}{SK_1}p^3}$$

Modèle de gain unitaire, de classe 0 et d'ordre 3.

Q2 : En déduire une condition sur K_1 assurant la stabilité et déterminer l'erreur de poursuite pour une entrée en échelon.

Les coefficients étant tous positifs, le modèle est stable si : $\dfrac{\cancel{S}}{\cancel{K_1}} \times \dfrac{f\cancel{K_2}}{\cancel{S}K_1} > \dfrac{m\cancel{K_2}}{S\cancel{K_1}} \Leftrightarrow \dfrac{f}{K_1} > \dfrac{m}{S} \Leftrightarrow \boxed{K_1 < \dfrac{fS}{m}}$

Si le modèle est stable, de classe 0 et de gain statique unitaire, l'erreur statique du modèle est nulle.

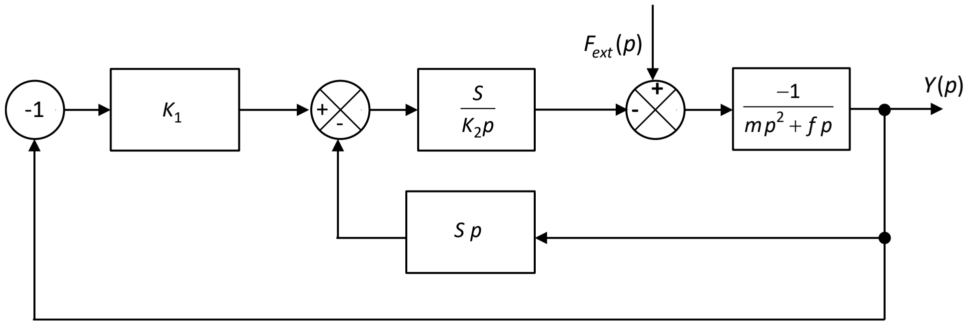
Pour un échelon de consigne d'amplitude y_0, $e_{pour}(+\infty) = y_0 - \Delta y(+\infty)$

avec $\Delta y(+\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pY(p) = \lim\limits_{p\to 0} \cancel{p}H(p)\dfrac{y_0}{\cancel{p}} = y_0 \lim\limits_{p\to 0} H(p) = y_0$

d'où $e_{pour}(+\infty) = 0$.

Q3 : Déterminer la fonction de transfert $F(p) = \left.\dfrac{Y(p)}{F_{ext}(p)}\right|_{Y_c=0}$

Avec $Y_c(p) = 0$ le schéma comprend une seule boucle. Le soustracteur doit être modifié. Sur la boucle de retour, il y a deux blocs en parallèle : K_1 et Sp. Le schéma modifié est le suivant et la fonction de transfert de la boucle de retour s'écrit : $(-K_1 - Sp)\dfrac{S}{K_2 p}$.



$$F(p)=\left.\frac{Y(p)}{F_{ext}(p)}\right|_{Y_c=0}=\frac{\dfrac{-1}{m p^2+f p}}{1+\dfrac{-1}{(m p^2+f p)}(-K_1-S p)\dfrac{S}{K_2 p}}=\frac{-K_2 p}{(m p^2+f p)K_2 p+(K_1+S p)S}$$

$$=\frac{-K_2 p}{K_1 S+S^2 p+K_2 f p^2+K_2 m p^3}=\frac{-K_2}{K_1 S}\frac{p}{1+\dfrac{S}{K_1}p+\dfrac{K_2 f}{K_1 S}p+\dfrac{K_2 m}{K_1 S}p^3}$$

Fonction de transfert d'ordre 3 et de classe -1.

Q4 : Déterminer l'erreur statique de régulation pour une perturbation en échelon correspondant à une surcharge F_0. Le modèle est-il sensible à la perturbation.

On remarque que les coefficients du dénominateur, à un coefficient près, sont ceux de la fonction de transfert en poursuite. Si le modèle est stable en poursuite, il est stable en régulation.

Modèle supposé stable, de classe -1, la variation $\Delta y(+\infty)$ est nulle pour une perturbation en échelon. Le modèle est insensible à la perturbation f_{ext}.

L'erreur en régulation s'écrit $e_{reg}(+\infty)=-\Delta y(+\infty)$ avec, pour une perturbation en échelon d'amplitude F_0 :

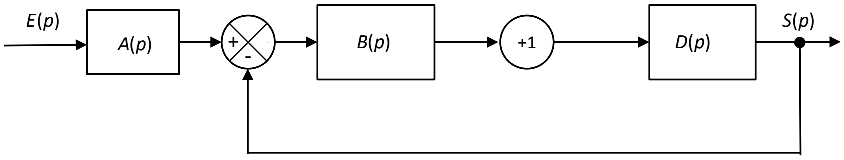
$$\Delta y(+\infty)=\lim_{p\to 0^+} pY(p)=\lim_{p\to 0^+} \cancel{p}\frac{F_0}{\cancel{p}}\frac{(-K_2)}{K_1 S}\frac{p}{1+\dfrac{S}{K_1}p+\dfrac{K_2 f}{K_1 S}p+\dfrac{K_2 m}{K_1 S}p^3}=0 \text{ .}$$

D'où : $e_{reg}(+\infty)=0$, modèle insensible à la perturbation en échelon.

Exercice 2.3 : **SYNTHESE DE SCHEMA-BLOCS**

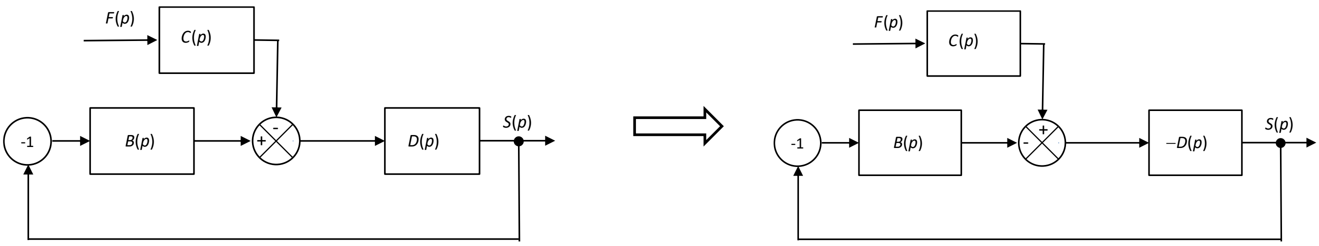
Exemple 1 : à retour unitaire

Pour $F(p)=0$:



$S(p)=A(p)\dfrac{B(p)D(p)}{1+B(p)D(p)}E(p)$, d'où $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{F(p)=0}=\dfrac{A(p)B(p)D(p)}{1+B(p)D(p)}$

Pour $E(p)=0$:

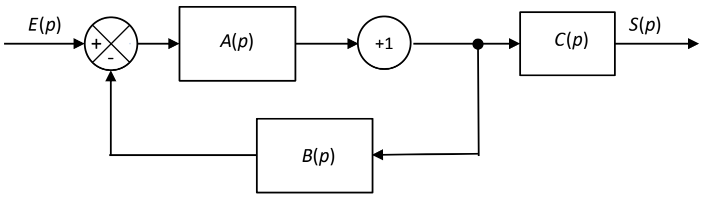


$S(p)=C(p)\dfrac{-D(p)}{1+D(p)B(p)}F(p)$, d'où $\left.\dfrac{S(p)}{F(p)}\right|_{E(p)=0}=\dfrac{-C(p)\,D(p)}{1+B(p)D(p)}$

Le théorème de superposition (lié à la linéarité du problème) donne : $S(p)=\dfrac{A(p)B(p)D(p)}{1+B(p)D(p)}E(p)-\dfrac{C(p)\,D(p)}{1+B(p)D(p)}F(p)$

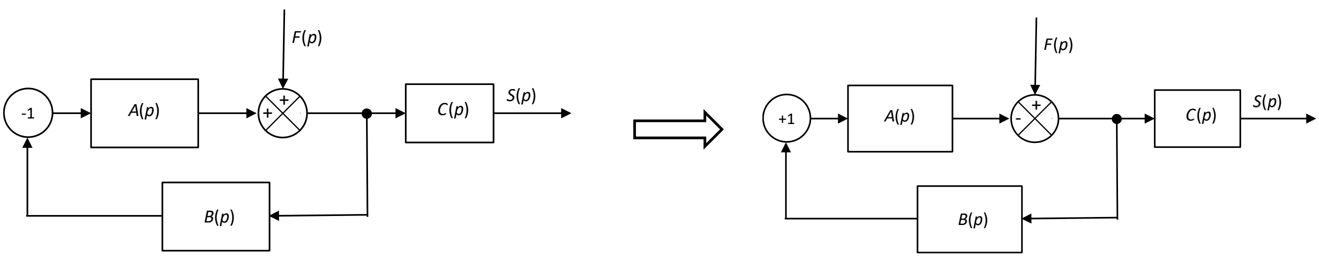
Exemple 2

Pour $F(p)=0$:



$S(p)=\dfrac{A(p)}{1+A(p)B(p)}C(p)\,E(p)$, d'où $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{F(p)=0}=\dfrac{A(p)C(p)}{1+A(p)B(p)}$

Pour $E(p)=0$:

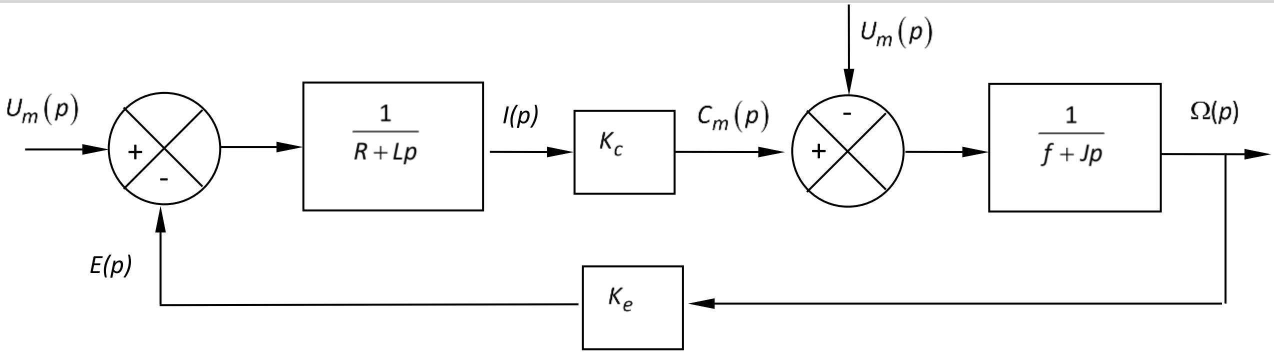


$S(p)=\dfrac{1}{1+B(p)A(p)}C(p)F(p)$, d'où $\left.\dfrac{S(p)}{F(p)}\right|_{E(p)=0}=\dfrac{C(p)}{1+A(p)B(p)}$

Le théorème de superposition donne : $S(p)=\dfrac{A(p)C(p)}{1+A(p)B(p)}E(p)+\dfrac{C(p)}{1+A(p)B(p)}F(p)=\dfrac{C(p)}{1+A(p)B(p)}\big(A(p)E(p)+F(p)\big)$

Exercice 2.4 : **MOTEUR A COURANT CONTINU**

Q1 : Les conditions initiales étant nulles, compléter le schéma-bloc ci-dessous dans le domaine de Laplace.



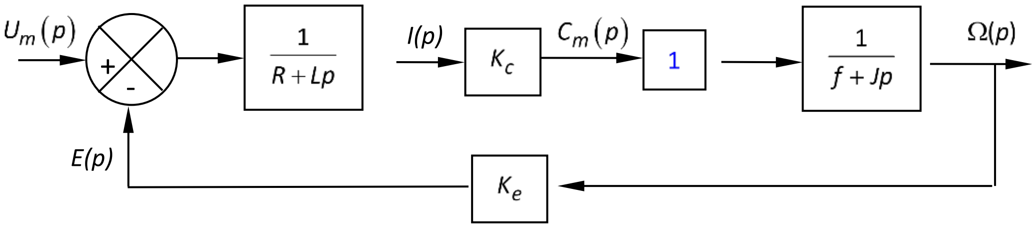
Q2 : Ce schéma comporte une boucle et des soustracteurs. Est-ce un système asservi ?

Non. La grandeur de sortie n'est pas de même nature que la grandeur d'entrée. Il n'y a pas de capteur.

> Le schéma représente la structure des équations différentielles du modèle de connaissance d'un moteur, pas un système asservi.
> Les soustracteurs ne donnent pas une image de l'erreur et ne modélisent pas des comparateurs.

Q3 : Exprimer de façon littérale la fonction de transfert $\left.\frac{\Omega(p)}{U_m(p)}\right|_{C_r(p)=0}$ (sans couple résistant).

Si $C_r(p)=0$ alors le schéma est similaire à :



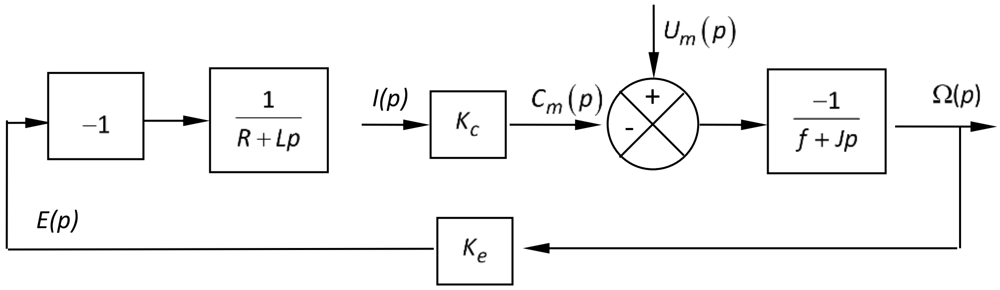
$$\left.\frac{\Omega(p)}{U_m(p)}\right|_{C_r(p)=0} = \frac{\frac{1}{(R+Lp)}K_c\frac{1}{(f+Jp)}}{1+K_e\frac{1}{(R+Lp)}K_c\frac{1}{(f+Jp)}} = \frac{K_c}{(R+Lp)(f+Jp)+K_eK_c} = \frac{K_c}{Rf+RJp+Lfp+LJp^2+K_eK_c}$$

$$=\left(\frac{K_c}{Rf+K_eK_c}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}p+\frac{LJ}{Rf+K_eK_c}p^2}\right)=F_1(p)$$

> Ainsi si $C_r(p)=0$ alors $\Omega(p)=F_1(p)\,U_m(p)$.

Q4 : Exprimer de façon littérale la fonction de transfert $\left.\dfrac{\Omega(p)}{C_r(p)}\right|_{U_m(p)=0}$.

Si $U_m(p)=0$ alors le schéma, après modification des signes du soustracteur, est similaire à :



$$\left.\frac{\Omega(p)}{C_r(p)}\right|_{U_m(p)=0}=\frac{\dfrac{-1}{(f+Jp)}}{1+K_e(-1)\dfrac{1}{(R+Lp)}K_c\dfrac{-1}{(f+Jp)}}=\frac{-(R+Lp)}{(R+Lp)(f+Jp)+K_eK_c}=\frac{-R-Lp}{(Rf+RJp+Lfp+LJp^2)+K_eK_c}$$

$$=\left(\frac{-R}{Rf+K_eK_c}\right)\left(\frac{1+\dfrac{L}{R}p}{1+\dfrac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}p+\dfrac{LJ}{Rf+K_eK_c}p^2}\right)=F_2(p)$$

Ainsi si $U_m(p)=0$ alors $\Omega(p)=F_2(p)\cdot C_r(p)$

Q5 : En précisant le théorème utilisé, en déduire l'expression de $\Omega(p)$ en fonction de $U_m(p)$ et $C_r(p)$.

Le théorème de superposition donne $\boxed{\Omega(p)=F_1(p)\,U_m(p)+F_2(p)\,C_r(p)}$

Q6 : Donner l'expression de $\omega(+\infty)$ pour $u_m(t)$ un échelon de tension d'amplitude U_{m0} et $c_r(t)$ un échelon d'amplitude C_{r0}.

Les fonctions de transfert $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sont d'ordre 2, de classe 0 et stables (coefficients tous strictement positifs).

En notant ω_0 la vitesse angulaire initiale, la valeur finale s'écrit : $\boxed{\omega(+\infty)=\omega_0+\dfrac{K_c}{R\,f+K_e\,K_c}U_{m0}-\dfrac{R}{R\,f+K_e\,K_c}C_{r0}}$

Par la suite, on supposera que les valeurs initiales sont nulles. U_{m0} et C_{r0} correspondent alors à la tension d'alimentation du moteur et au couple résistant et, en régime permanent : $\omega(+\infty)=\dfrac{K_c}{R\,f+K_e\,K_c}U_{m0}-\dfrac{R}{R\,f+K_e\,K_c}C_{r0}$

Démonstration par le théorème de la valeur finale :

Dans les conditions de Heaviside : $U_m(p)=\dfrac{U_{m0}}{p}$; $C_r(p)=\dfrac{C_{r0}}{p}$

$$\Delta\omega(+\infty)=\omega(+\infty)-\omega_0=\lim_{p\to0}p\,\Omega(p)=\lim_{p\to0}\cancel{p}\left[F_1(p)\frac{U_{m0}}{\cancel{p}}+F_2(p)\frac{C_{r0}}{\cancel{p}}\right]=U_{m0}\lim_{p\to0}F_1(p)+C_{r0}\lim_{p\to0}F_2(p)$$

$$=\frac{K_c}{R\,f+K_e\,K_c}U_{m0}-\frac{R}{R\,f+K_e\,K_c}C_{r0}\Rightarrow\boxed{\omega(+\infty)=\omega_0+\frac{K_c\,U_{m0}-R\,C_{r0}}{R\,f+K_e\,K_c}}$$

Q7 : Vérifier que $K_c U_{m0}$ et RC_{r0} sont de même dimension, ainsi que Rf et $K_e K_c$.

Rappel : à l'aide d'équations de base, on connaît la correspondance entre certaines unités :

$$P = m \cdot g \Rightarrow N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$$
$$u = R \cdot i \Rightarrow V = \Omega \cdot A$$
$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow V = H \cdot A \cdot s^{-1}$$

S'il n'y a pas d'unité, indiquer « sans unité », ou « sans dimension ».

Ainsi $K_c U_{m0}$ est en $\frac{Nm}{A}V$ et RC_{r0} en $\Omega Nm = \frac{V}{A}Nm$. On peut donc les additionner…

Et Rf est en $\Omega \frac{Nm}{rad\,s^{-1}}$ et $K_e K_c$ en $\frac{V}{rad\,s^{-1}} \cdot \frac{Nm}{A} = \Omega \frac{Nm}{rad\,s^{-1}}$. On peut donc les additionner…

Q8 : Faire l'application numérique pour les 2 valeurs de C_{r0} (0 et 0,3 N.m) et pour U_{m0}=0 et 10V.

$R = 2{,}5\ \Omega$; $L = 0{,}0075\,H$; $J = 0{,}00005\,kg \cdot m^2$; $Kc = 0{,}11\,N \cdot m / A$; $Ke = 0{,}11\,V/(rad/s)$

Ainsi $\omega(+\infty) \approx 29{,}6\ rad/s$ pour $C_{r0} = 0\,Nm$ et $\omega(+\infty) \approx 9{,}4\ rad/s$ pour $C_{r0} = 0{,}3\,Nm$

Q9 : Ces résultats sont-ils cohérents avec la courbe ci-après obtenue par simulation numérique ?

Ces résultats sont similaires à ceux obtenus par simulation.

> Ce qui est cohérent puisque la simulation ne fait que résoudre numériquement les équations du modèle de connaissance.

Q10 : Conclure sur les performances de stabilité, rapidité et de précision.

Comportement pour un échelon de tension : 0s < t < 0,1s

La réponse présente une valeur finale pour une entrée de tension en échelon ; le modèle est stable.

Nous observons un seul dépassement : $D_{1\%} = \frac{D_1}{\Delta\omega(+\infty)} \approx \frac{0{,}5}{29{,}5} \approx 1{,}6\%$.

Le tube à %5 a pour limites : $29{,}5 \pm 0{,}05 \times 29{,}5 \approx 29{,}5 \pm 1{,}47$ rad/s. Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,01 s.

Comme la sortie $\omega(t)$ est en rad/s et l'entrée $u_m(t)$ en volt (et le système non asservi), la précision n'est pas définie.

Comportement pour un échelon de couple : 0,1s < t < 0,2s

La réponse présente une valeur finale pour une entrée de couple en échelon ; le modèle est stable.

Nous observons un seul dépassement : $D_{1\%} = \left|\frac{D_1}{\Delta\omega(+\infty)}\right| \approx \frac{0{,}5}{|9{,}5 - 29{,}5|} \approx 5\%$.

Le tube à %5 a pour limites : $9{,}5 \pm 0{,}05 \times 20 \approx 9{,}5 \pm 1$ rad/s. Le temps de réponse à 5% est d'environ 0,007 s.

La précision n'est pas définie.

> Surtout ne pas affirmer que le système est précis car nous avons envoyé 10 et qu'il tend vers 10. Il faut aussi s'interroger sur les unités et sur l'aspect fonctionnel (est-ce que cela a du sens de comparer les valeurs ?).

> Nous pouvons observer que la vitesse chute énormément à l'apparition du couple C_r. Ainsi, nous pouvons conclure que la vitesse angulaire du moteur dépend de la tension d'alimentation et du couple résistant.
> Pour maintenir la vitesse angulaire constante, il faut l'asservir (en ajoutant IHM, comparateur, correcteur et capteur).