PÔLE CHATEAUBRIAND JOLIOT-CURIE

Sciences de l'ingénieur

TD 3 : COMPORTEMENT FREQUENTIEL DES SLCI, 2EME ORDRE

C 09

CORRIGE

Exercice 3.1 : REPRESENTATION ASYMPTOTIQUE DE BODE ET BANDE PASSANTE

Q1 : Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode des fonctions de transfert suivantes. Tracer les courbes approchées de gain et de phase en déterminant les valeurs réelles au droit et au milieu des pulsations de cassure.

$$F_4(p)=\frac{3}{2+0{,}1p+0{,}02p^2} \qquad F_6(p)=\frac{1}{(2+p)(2+4p+10p^2)} \qquad F_7(p)=\frac{5(2+0{,}5p)}{(0{,}5+2p+10p^2)p}$$

$$F_4(p)=\frac{3}{2+0{,}1p+0{,}02p^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+0{,}05p+0{,}01p^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+0{,}1p+\frac{1}{10^2}p^2} \Rightarrow \boxed{F_4(p)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2.0{,}25}{10}p+\frac{1}{10^2}p^2}}$$

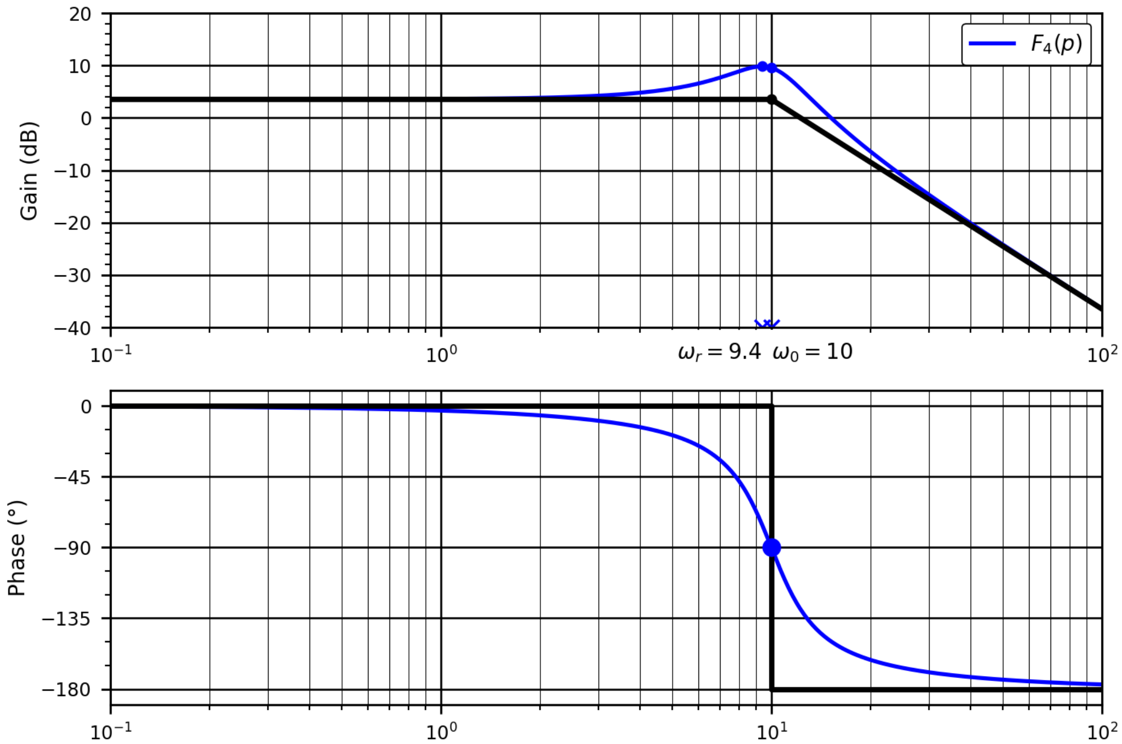
2ème ordre usuel avec $K=1{,}5$, $\omega_0=10$ rad/s et $z=0{,}25$ (présence d'une résonance car z<0,7).

Gain à basse fréquence : $20\log K\approx 3{,}5$ dB

Pour ω_0 : $G_{dB}(\omega_0)=20\log K-20\log(2z)=3{,}5+6\approx 9{,}5$ dB (écart au point de cassure de +6 dB).

Pour $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-2z^2}\approx 9{,}35$ rad/s (très proche de ω_0) : $G_{dB}(\omega_r)=20\log K-20\log\left(2z\sqrt{1-z^2}\right)=3{,}5+6{,}3\approx 9{,}8$ dB (écart avec l'asymptote de +6,3 dB).

Pour la phase, $\varphi(\omega_0)=-90°$.



$$F_6(p)=\frac{1}{(2+p)(2+4p+10p^2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{(1+0,5p)}\frac{1}{(1+2p+5p^2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}p\right)}\frac{1}{\left(1+2p+\frac{1}{0,45^2}p^2\right)}\Rightarrow \boxed{F_6(p)=\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{2\times 0,45}{0,45}p+\frac{1}{0,45^2}p^2\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}p\right)}}$$

NB : il y a résonance pour le second ordre car z=0,45<0,7

Gain à basse fréquence : $20\log K \approx -12$ dB

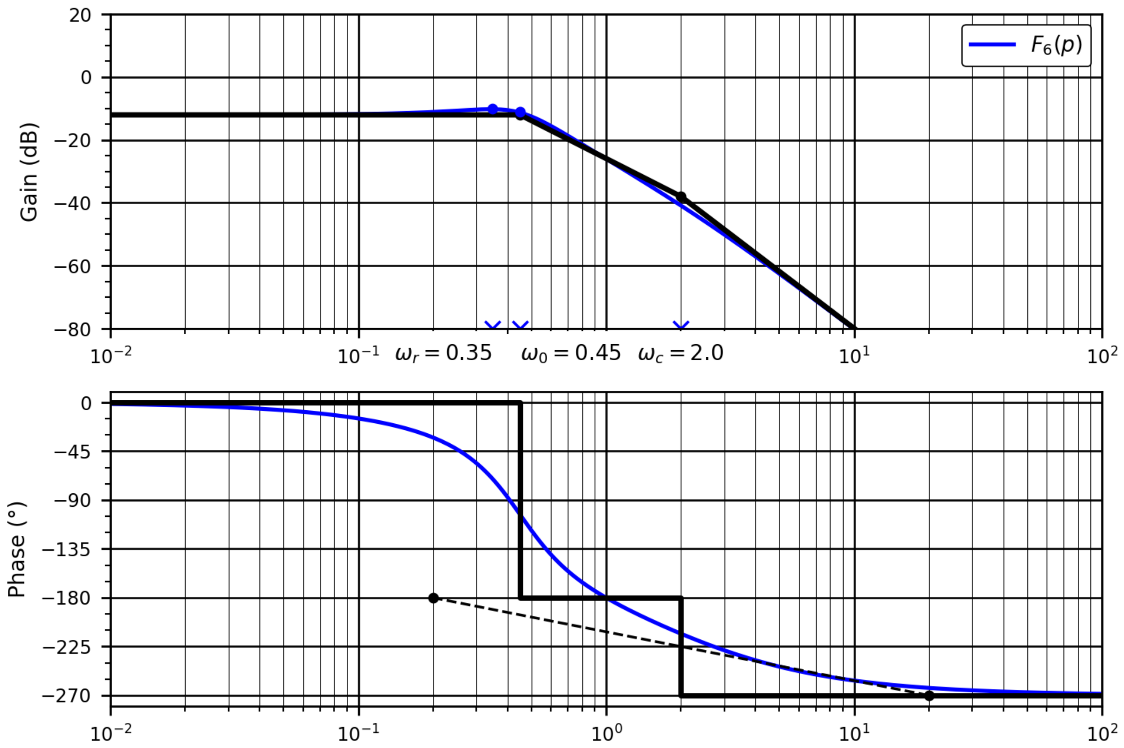
La pulsation de cassure du premier ordre est à plus d'une demi-décade de celle du deuxième ordre. On peut considérer que le premier ordre n'influe pas sur le gain au droit et avant $\omega_0 = 0,45$ rad/s.

Pour ω_0 : $G_{dB}(\omega_0)=20\log K - 20\log(2z) \approx -12+0,9 \approx -11,1$ dB (écart au point de cassure de +0,9 dB).

Pour $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-2z^2}\approx 0,35$ rad/s (très proche de ω_0) : $G_{dB}(\omega_r)=20\log K-20\log\left(2z\sqrt{1-z^2}\right)\approx -12+1,9\approx -10,1$ dB (écart avec l'asymptote de +1,9 dB).

Pour $\omega_c = 2$ rad/s : courbe à -3 dB du point de cassure.

Pour la phase, les pulsations de cassure ne sont pas assez éloignées pour pouvoir prédire précisément les valeurs.



Idéalement, utiliser les possibilités de calcul de votre calculatrice, dont les calculs en complexes en allant chercher l'argument de la fonction évaluée en $j\omega$ avec des valeurs de ω particulières. Sinon :

$$\varphi(\omega)=\arg\left(F_6(j\omega)\right)=\arg\left(\frac{1}{(2+j\omega)\left(2+4j\omega-10\omega^2\right)}\right)=\arg(1)-\arg(2+j\omega)-\arg\left(2-10\omega^2+j4\omega\right)$$

$$=0-\arctan\frac{\omega}{2}-\arccos\left(\frac{2-10\omega^2}{\sqrt{\left(2-10\omega^2\right)^2+16\omega^2}}\right)$$

Pour le calcul de l'argument du deuxième ordre, le domaine de la fonction arctan n'est pas adapté. Arccos donne le résultat sans avoir à gérer le modulo.

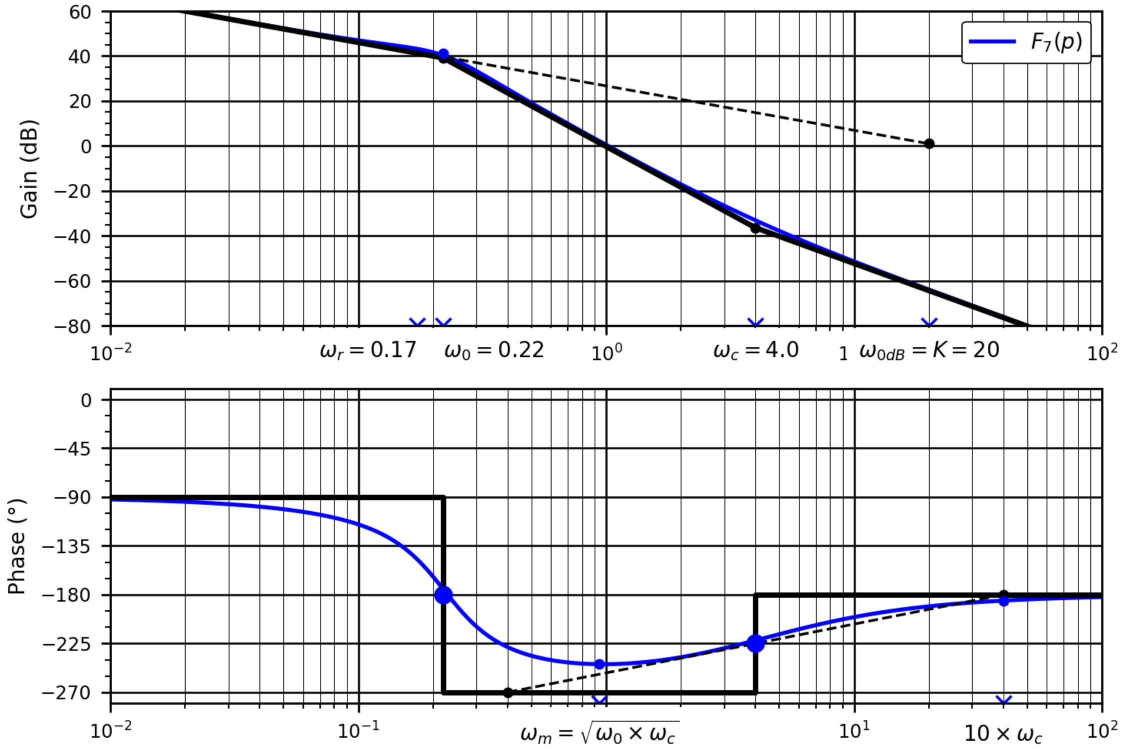
On pose : $z=a+jb=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+j\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=|z|\left(\cos\varphi+j\sin\varphi\right)$, d'où : $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\varphi(1)=-180°$ $\qquad \varphi(2)=-213°$ $\qquad \varphi(0,45)=-103°$

En supposant négligeable l'influence du deuxième ordre en 20 rad/s, $\varphi(10\omega_c)=\varphi(20)=270°-6°$.

$$F_7(p)=\frac{5(2+0{,}5p)}{(0{,}5+2p+10p^2)p}=\frac{5\times 2}{0{,}5}\frac{1}{p}(1+0{,}25p)\frac{1}{1+4p+20p^2}=\frac{20}{p}\left(1+\frac{1}{4}p\right)\frac{1}{1+4p+\frac{1}{0{,}22^2}p^2}\Rightarrow \boxed{F_7(p)=\frac{20}{p}\frac{1}{\left(1+\frac{2\cdot 0{,}44}{0{,}22}p+\frac{1}{0{,}22^2}p^2\right)}\left(1+\frac{1}{4}p\right)}$$

NB : il y a résonance (faible) pour le second ordre car z=0,44<0,7.



Comportement basse fréquence : -20 dB/dec passant par $\omega_{0dB} = K = 20$ rad/s

La pulsation de cassure de l'inverse de premier ordre est à plus d'une décade de celle du deuxième ordre. On peut considérer que le premier ordre n'influe pas sur le gain, ni sur la phase, au droit et avant $\omega_0 = 0{,}22$ rad/s.

Pour ω_0, l'écart au point de cassure vaut : $\Delta G_{dB}(\omega_0) = -20\log(2z) \approx 1{,}1$ dB .

Pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2} \approx 0{,}17$ rad/s, l'écart à l'asymptote vaut : $\Delta G_{dB}(\omega_r) = -20\log\left(2z\sqrt{1-z^2}\right) \approx 2$ dB.

Pour $\omega_c = 4$ rad/s : courbe à +3 dB du point de cassure.

Le gain réel est très proche du diagramme asymptotique.

Pour la phase, les pulsations de cassure étant assez éloignées :

$\varphi(\omega_0) \approx -90° - 90° = -180°$ et $\varphi(\omega_c) \approx -270 + 45 = -225°$

Au milieu des pulsations de cassures, en $\omega_m = \sqrt{\omega_0 \times \omega_c} \approx 0{,}94$ rad/s.

En échelle logarithmique, le milieu de deux points a pour valeur la racine du produit : si $\omega_m = \sqrt{\omega_1 \times \omega_2}$, le logarithme de ω_m est au milieux des logarithmes de ω_1 et ω_2 .

$$\varphi(\omega) = \arg\left(F_{67}(j\omega)\right) = \arg\left(\frac{5(2+0{,}5j\omega)}{j\omega\left(0{,}5+2j\omega-10\omega^2\right)}\right) = \arg(5) - \arg(j\omega) + \arg(2+j0{,}5\omega) - \arg\left(0{,}5-10\omega^2+j2\omega\right)$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{0{,}5\omega}{2} - \arccos\left(\frac{0{,}5-10\omega^2}{\sqrt{\left(0{,}5-10\omega^2\right)^2+4\omega^2}}\right)$$

Attention : si votre calculatrice donne des degrés ou des radians, soustraire $\pi/2$ ou 180° !

Préférez, l'utilisation des calculs en complexe.

On trouve : $\varphi(\omega_0) =$ -175°, $\varphi(\omega_m) =$ -244°, $\varphi(\omega_c) =$ -222°, $\varphi(10\omega_c) =$ -185°.

Q2 : Déterminer analytiquement la bande passante à -3 dB de $F_4(p)$ et $F_6(p)$. Vérifier le résultat graphiquement.

Rappel : $\omega_{c-3\text{dB}}$ est la pulsation à partir de laquelle le signal est atténué de 30% par rapport à une valeur de référence.

Pour des filtres passe-bas, la référence est la valeur du gain pour les basses pulsations ($\omega \to 0$).

Ainsi $\omega_{c-3\text{dB}}$ est la pulsation telle que :

$G(\omega_{c-3\text{dB}}) = 70\% \times G(\omega \to 0) = 0{,}7 \times G(\omega \to 0)$ ou en dB : $G_{dB}(\omega_{c-3\text{dB}}) = G_{dB}(\omega \to 0) + 20\log(0{,}7)$

$G_{dB}(\omega_{c-3\text{dB}}) = G_{dB}(\omega \to 0) - 3\text{dB}$

Or $G(\omega \to 0) = K$ $\quad G_{dB}(\omega \to 0) = 20 \cdot \log K$

On cherche donc $\omega_{c-3\text{dB}}$ telle que :

$\boxed{G(\omega_{c-3\text{dB}}) = 0{,}7 \times K}$ ou en dB : $\boxed{G_{dB}(\omega_{c-3\text{dB}}) = 20\log K - 3\text{dB}}$

- Pour $F_4(p) = \dfrac{3}{2 + 0{,}1p + 0{,}02p^2}$

$$G(\omega_{c-3dB}) = \frac{3}{\sqrt{\left(2 - 0{,}02\,\omega_{c-3dB}^{\;2}\right)^2 + 0{,}1^2\,\omega_{c-3dB}^{\;2}}} = 0{,}7 \times \frac{3}{2} \Rightarrow \omega_{c-3dB} = 14{,}9\text{ rad/s} \Rightarrow \boxed{BP =]0;14{,}9\text{ rad/s}]}$$

- Pour $F_6(p) = \dfrac{1}{(2+p)(2+4p+10p^2)}$

$$G(\omega_{c-3dB}) = \frac{1}{\sqrt{2^2 + \omega_{c-3dB}^{\;2}} \times \sqrt{\left(2 - 10\,\omega_{c-3dB}^{\;2}\right)^2 + 4^2\,\omega_{c-3dB}^{\;2}}} = 0{,}7 \times \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_{c-3dB} = 0{,}6\text{ rad/s} \Rightarrow \boxed{BP =]0;0{,}6\text{ rad/s}]}$$

Le calcul doit être résalisé numériquement. La précision demandée est de 2 ou 3 chiffres significatifs.

Exercice 3.2 : **IDENTIFICATION DE FONCTION DE TRANSFERT SUR DIAGRAMME DE BODE**

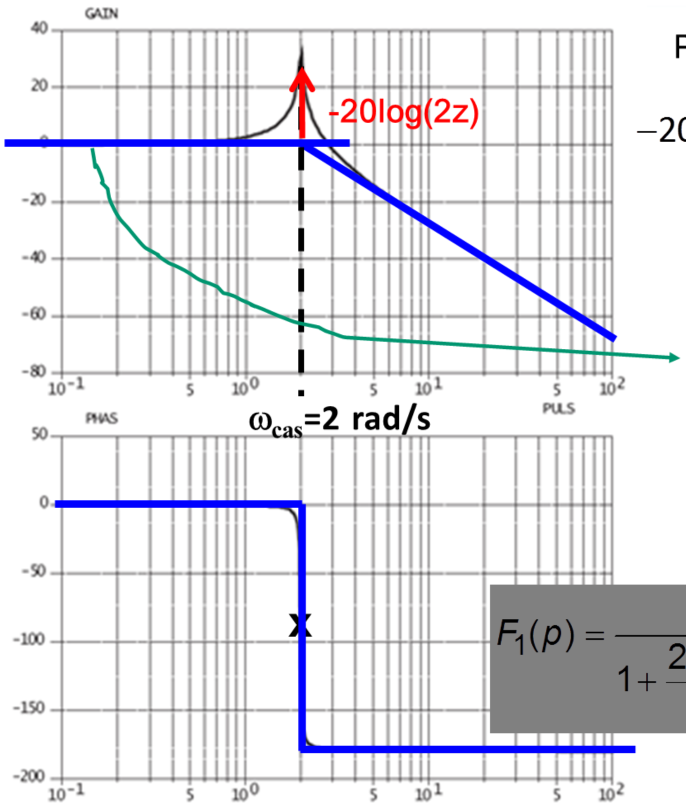
Q1 : Sur les diagrammes de Bode suivants, tracer les diagrammes de Bode asymptotiques puis identifier les fonctions de transfert correspondantes.

Compte tenu de la forme des diagrammes, on s'oriente vers un modèle de la forme

$$\frac{K}{(1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2)}$$

Où se situe précisément la pulsation de cassure ?

Il suffit de prendre la valeur où le déphasage vaut -90°



Pour obtenir z,

$$-20\log 2z = +28\text{dB}$$

$$\Rightarrow z = 0{,}02$$

Pour $\omega \to 0$

$$20\log K = 0\text{dB}$$

$$\Rightarrow K = 1$$

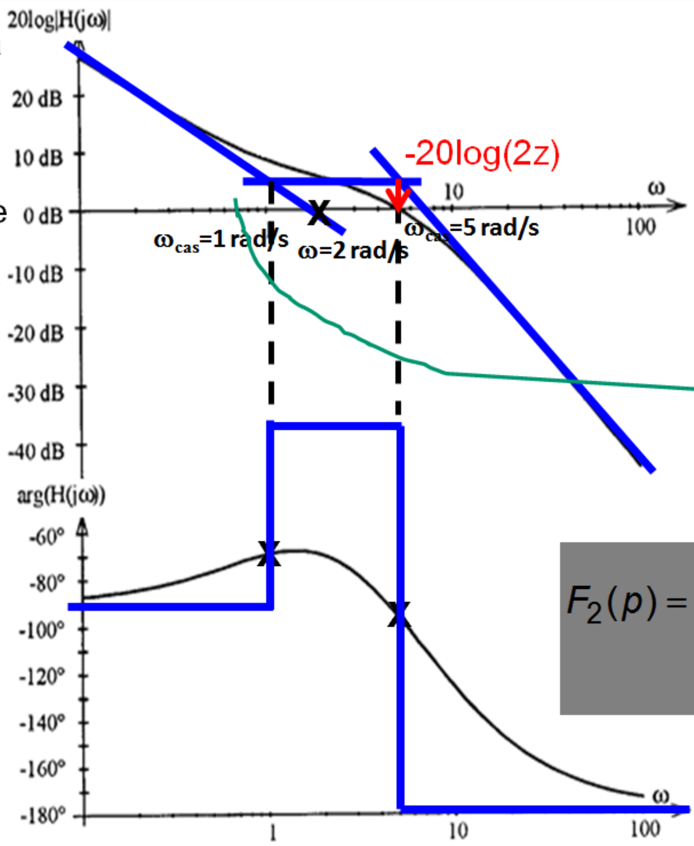
$$F_1(p) = \frac{1}{1+\frac{2\cdot 0{,}02}{2}.p+\frac{1}{2^2}p^2}$$

Compte tenu de la forme des diagrammes, on s'oriente vers un modèle de la forme

$$\frac{K}{p}\cdot\frac{(1+\tau p)}{\left(1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2\right)}$$

Où se situent précisément les pulsations de cassure ?

Aux changements de courbure de la courbe de déphasage



Pour obtenir z,

$$-20\log 2z = -6\text{dB}$$

$$\Rightarrow z = 1$$

L'intégrateur coupe l'axe des abscisses à ω=K

$$F_2(p) = \frac{2}{p}\frac{(1+p)}{\left(1+\frac{2.1}{5}p+\frac{1}{5^2}p^2\right)}$$

Exercice 3.3 : **ASSERVISSEMENT DE FREINAGE D'UN A318**

Q1 : Déterminer la bande passante à -3 dB de l'accéléromètre à partir de son diagramme de Bode. Que pensez-vous de cette valeur par comparaison à la bande passante attendue dans le cahier des charges ? Identifier la forme et les caractéristiques de la fonction transfert de l'accéléromètre.

La bande passante à -3 dB de l'accéléromètre vaut 100 rads^{-1}. Cette valeur est bien supérieure à la valeur exigée au cahier des charges si bien qu'on peut penser que **l'accéléromètre ne sera pas un composant limitant**.

Le diagramme de Bode montre une asymptote à basse pulsation horizontale et une asymptote à haute pulsation à -40 dB/déc, ce qui conduit à choisir un modèle du deuxième ordre. La phase confirme ce choix avec une phase nulle à basse pulsation et à -180° à haute pulsation.

$$\Rightarrow \quad H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

La valeur nulle à basse pulsation montre que le gain statique est tel que $20\log K_a = 0\text{dB}$ soit $K_a = 1$.

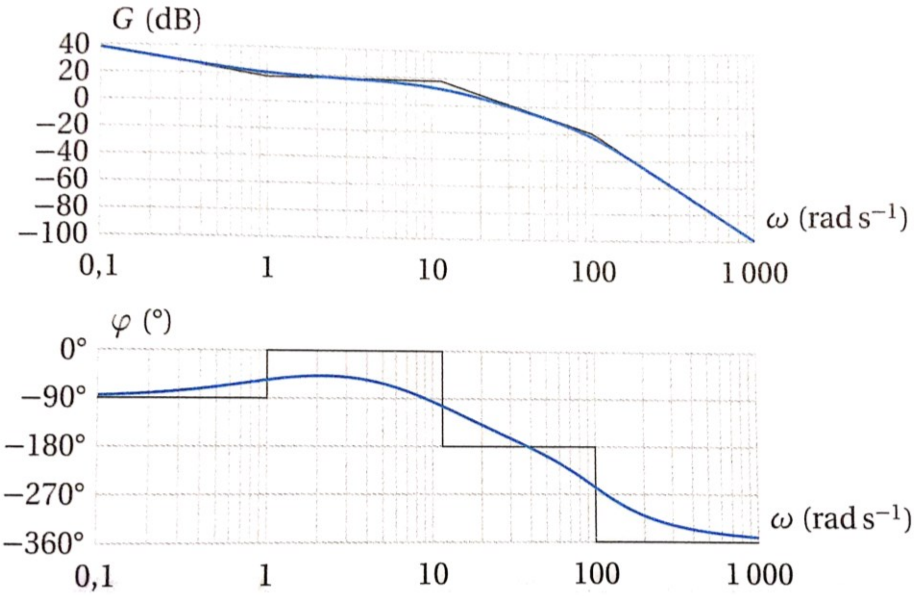
La pulsation propre correspond à une phase de - 90° : $\omega_0 = 100\,\text{rads}^{-1}$.

La valeur du gain en $\omega_0 = 100\,\text{rads}^{-1}$ vaut -3dB d'où $-20\log 2z = -3$, soit $z = 0,7$.

Q2 : Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $K_i = 1$.

$$FTBO(p) = H_b(p)\,H_s(p)\,H_f(p)\,H_a(p) = K_i\frac{(1+\tau_i p)}{\tau_i p}\frac{K_s}{(1+\tau_s p)^2}K_f\frac{K_a}{\left(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2\right)}$$

$$\Rightarrow \quad FTBO(p) = \frac{(1+p)}{p}\frac{100}{\left(1+8,7\cdot 10^{-2}p\right)^2}0,08\frac{1}{\left(1+\frac{2\cdot 0,7}{100}p+\frac{1}{100^2}p^2\right)} = \frac{8}{p}\cdot(1+p)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{11,5}p\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2\cdot 0,7}{100}p+\frac{1}{100^2}p^2\right)}$$



Q3 : Que peut-on conclure de la valeur asymptotique à basse pulsation ?

La valeur asymptotique à basse pulsation vaut 0 dB, ce qui signifie que le gain statique de la FTBF vaut 1. Cette particularité montre que le système en réponse à une consigne en échelon va tendre vers cette consigne, donc le système est précis et satisfait le cahier des charges sur ce critère.

Q4 : Déterminer la valeur de la surtension de la FTBF. Quelle en sera la conséquence sur la réponse indicielle ?

La valeur de la surtension est de 4 dB. Cette surtension répond au cahier des charges (<5dB), mais elle implique que z<0,7. Elle aura pour conséquence la présence d'un dépassement sur la réponse à une consigne en échelon supérieure à 5% avec une pseudo-pulsation proche de 20 rad/s (car $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ est un peu inférieure à $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2z^2}$).