Université de Cergy-Pontoise
Date: Juin 2019

Examen L1-MS1-PCST-Session 2

Durée: 2h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

(a) Calculer les limites $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{4x^5}$.
(b) Calculer l'intégrale $\int_1^2 x \cdot ln(x)dx$.

Exercice 2.
On considère la fonction $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ln(e^{2x} - 1).$$

(i) Justifier brièvement que f est continue et dérivable.
(ii) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de $f(x)$.
(iii) Montrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
(iv) On considère l'équation $(ln(e^{2x} - 1))^2 - 8 = 0$, combien de solutions y-a-t-il? Justifier.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}sin(x) - x.$$

(i) Etudier la variation de la fonction f. Puis en déduire qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $1 - \frac{1}{2}sin(l) = l$.
(ii) Justifier que $l \in [0; 1]$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}sin(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
(iv) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - l \mid \leq \frac{1}{2} \mid u_n - l \mid .$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - l \mid \leq (\frac{1}{2})^n \mid u_0 - l \mid .$$

(v) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 4.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^3 = 1 + i$.